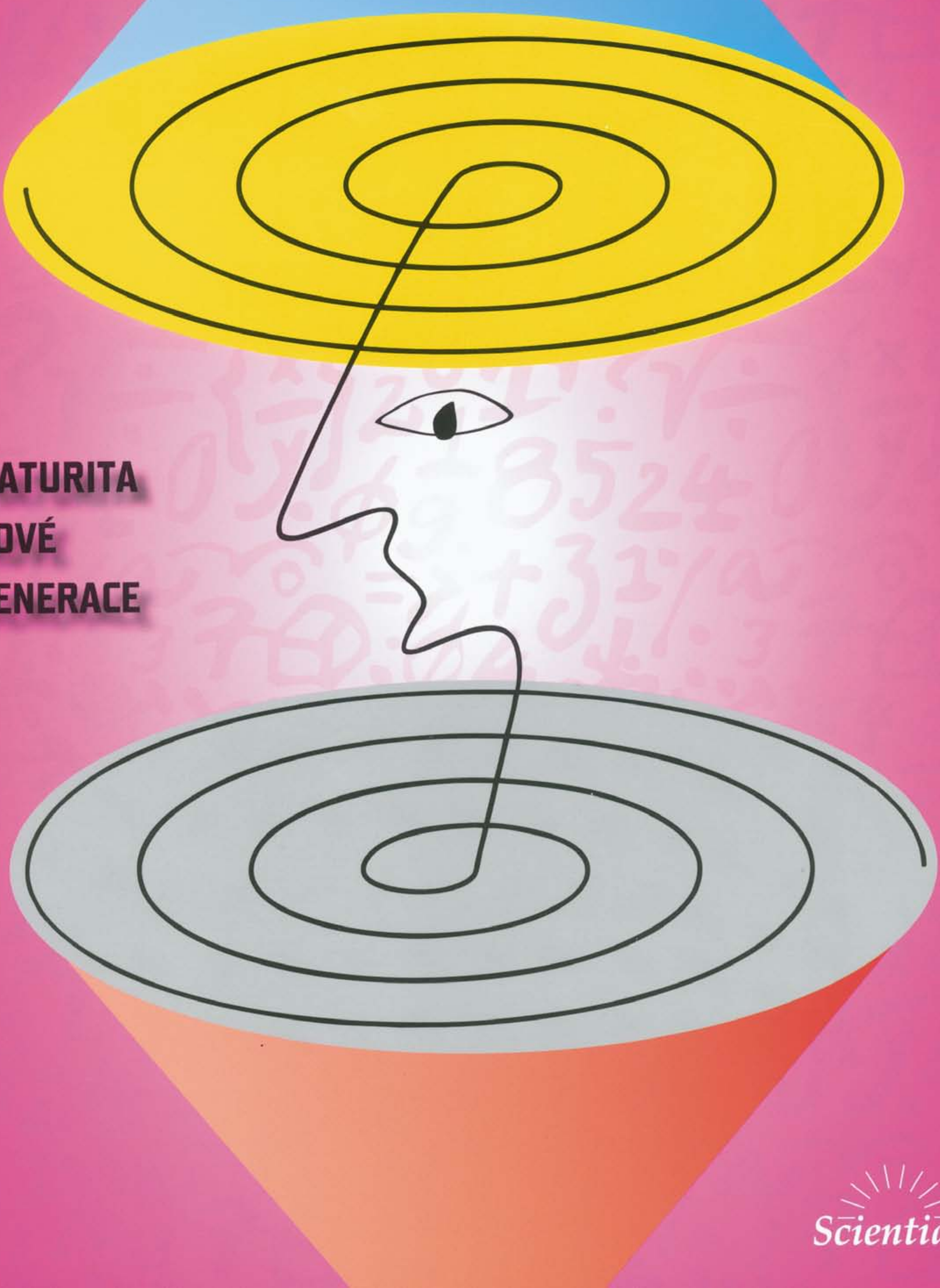
MATEMATIKA

Jindřich Vocelka



MATURITA
NOVÉ
GENERACE

Scientia

MATEMATIKA

Jindřich Vocelka

MATURITA NOVÉ GENERACE

Scientia
PRAHA 2010

Napsal PhDr. Jindřich Vocelka
Lektorovala Mgr. Miloslava Černá

Bližší informace a objednávky:
NAKLADATELSTVÍ SCIENTIA, spol. s r. o.,
Křížová 1018/6, 150 05 Praha 5
tel. 233 350 201 • fax 220 510 274
obchod@scientia.cz • www.scientia.cz

ISBN 978-80-86960-50-0

OBSAH

ÚVOD

V této publikaci najdete padesát zpracovaných hesel, která mohou být samostatnými maturitními okruhy, případně je možné jejich vhodným spojením získat dvacet pět dvojic otázek.

Hesla jsou dostatečně široká. To proto, aby pětice zařazených úloh, z nichž některé se dále člení na několik dílčích, na sebe více či méně navazujících úkolů, mohla být obsahově pestrá, aby se problematikou dotýkala učiva matematiky různých ročníků střední školy.

Úlohy jsou sestaveny tak, aby

- respektovaly požadavky pro vyšší úroveň společné části maturitní zkoušky z matematiky, jak jsou uvedeny v dokumentu platného od šk. r. 2009/10, který zpracovalo Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání a schválilo MŠMT ČR (čj. 3243/2008-2/CERMAT),
- svým obsahem řešitele pozitivně motivovaly, vzbuzovaly zájem hledat odpověď na položenou otázku, příp. umožňovaly různé postupy řešení,
- řešení bylo jednoduché.

Jednoduchým řešením není ale v žádném případě míněna obtížnost úloh. Jde spíše o časovou náročnost, složitost výpočtu, aby se čas předepsaný pro trvání zkoušky neztrácel např. hledáním numerické chyby. Přitom student by neměl u zkoušky jen popisovat, jak by úlohu řešil s tím, že „pak bychom dosadili“, musí naopak dostat příležitost prokázat, že dokáže úkol-úlohu vyřešit jako celek od analýzy informací v textu zadání až k závěrečné odpovědi, tedy prokázat i úroveň kompetence provádět početní operace třeba i s využitím kalkulátoru. To také výše uvedený dokument požaduje...

Častěji, než je obvyklé, je text úlohy doplněn obrázkem nebo náčrtkem. To proto, aby vstupní informace byly co nejpřesnější a jednoznačné. Drobná nepozornost při analýze zadání může nepříjemně poznamenat průběh celé zkoušky.

Úlohy jsou uváděny s celým řešením.

To umožňuje zkoušejícímu na první pohled posoudit jejich obtížnost, odhadnout, jak je časově náročné řešení té které úlohy.

V rámečcích jsou uvedeny dílčí kroky, které úloha vyžaduje, má-li řešitel dospět ke správnému řešení. Je to osnova, podle níž může zkoušející postupovat, má-li co nejobjektivněji posoudit výkon zkoušeného, tedy jednoduše řečeno navrhnout klasifikaci.

Publikace není sice ani sbírkou úloh ani učebnicí, může však sloužit jako studijní materiál pro volitelné předměty navazující na povinný předmět.

Různorodost úloh, jejich seskupení pod obecné heslo jsou prostředkem k systemizaci učiva, se kterým se žáci v průběhu studia na střední škole setkali. Je to zdroj pro samostatnou práci nebo domácí přípravu studentů, pro to, aby jejich představa o náročnosti vyšší úrovně maturitní zkoušky z matematiky, byla co konkrétnější.

Moc bych si přál, aby byla i inspirací pro vyučující matematice a motivovala je k vymýšlení vlastních a pro studenty zajímavých úloh.

Autor

Téma 1

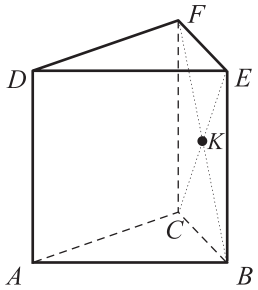
PŘÍMKA

1.1 Přímka t svírá s osou x odchylku $\alpha = 45°$ a je to tečna grafu funkce f: $y = \sqrt{6x}$. Bod Q je průsečík přímky t a osy x.

a) Načrtněte graf funkce f, uveďte její definiční obor a obor hodnot.
Jakými vzorci jsou určeny funkce g a h, jejichž grafy jsou obrazem grafu funkce f v osové souměrnosti s osou v ose y a ve středové souměrnosti se středem v počátku soustavy souřadnic?

b) Zjistěte souřadnice bodu Q.

1.2



Všechny hrany pravidelného trojbokého hranolu $ABCDEF$ jsou stejně dlouhé, K je střed stěny $CBEF$.

a) Popište postup zobrazení takového tělesa ve volném rovnoběžném promítání.

b) Určete průsečík přímky AK a roviny horní podstavy hranolu.

c) Jak velká je odchylka $\leftrightarrow AK$ a roviny DEF?

d) Má-li každá hrana tohoto hranolu velikost $a = \sqrt{3}$ cm, je jeho objem v centimetrech vyjádřen celým číslem?

1.3 Úloha v učebnici má text: „Pokud bychom každými dvěma z n bodů, které leží na kružnici k, vedli přímku, bylo by jich celkem 267. Kolik bodů bylo na kružnici umístěno?“

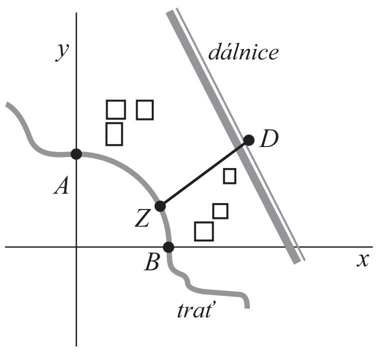
a) Žofie zjistila, že úloha nemá řešení. Přesvědčte se, že má pravdu.

b) V učebnici je ale uveden výsledek $n = 24$. V textu úlohy je proto nejspíš chybně uveden údaj o počtu přímek. Nahraďte jej správným.

c) Na kružnici k je umístěno m různých bodů, $m \geq 3$. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolená úsečka, jejímiž krajními body jsou některé dva z umístěných bodů, není stranou m-úhelníku $A_1A_2 \dots A_{m-1}A_m$?

d) Určete nejmenší počet vrcholů m-úhelníku $A_1A_2 \dots A_{m-1}A_m$, je-li pravděpodobnost, že náhodně zvolená jejich spojnice není stranou m-úhelníku, větší než 0,7.

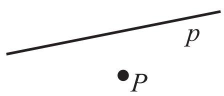
1.4



V projektu satelitního městečka se počítá i se zřízením železniční (Z) a autobusové (D) zastávky. Na plánku s měřítkem 1 : 10 000 je část železniční tratě AB nahrazena kružnicovým obloukem k: $x^2 + y^2 - 10 = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, přímý úsek dálnice pak přímkou d: $\dfrac{x}{30} - \dfrac{y}{10} = 1$.

Určete body Z a D tak, aby komunikace, která je bude spojovat, byla ze všech úseček spojujících oblouk AB a přímku d nejkratší. Vypočítejte i její délku zaokrouhlenou na celé desítky metrů.

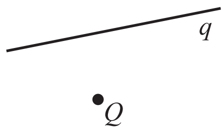
1.5 **a)**



Popište, co je množinou všech bodů X v rovině, které mají od přímky p stejnou vzdálenost, jako má bod P.
(Který útvar je tou množinou v prostoru?)

b) 

Popište, co je množinou všech bodů Z v rovině, které mají od bodu Q větší vzdálenost než od bodu P.

c) 

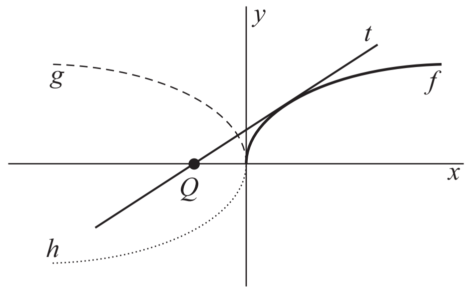
Popište, co je množinou všech bodů Y v rovině, které mají tutéž vzdálenost od přímky q jako od bodu Q.

d) Charakterizujte popsané množiny analyticky, je-li
p: $x + y + 2 = 0$, $P[0; 0]$,
q: $x - 4 = 0$, $Q[0; 5]$.

Řešení

1.1 **a)** $\mathsf{D}_f = \mathsf{H}_f = \langle \mathbf{0}; +\infty)$.

- náčrtek grafu funkce, D_f, H_f
- vzorce funkcí g a h
- význam směrnice přímky
- řešení soustavy rovnic s parametrem



$\boldsymbol{g}$: $\boldsymbol{y = \sqrt{-6x}}$
$\boldsymbol{h}$: $\boldsymbol{y = -\sqrt{-6x}}$

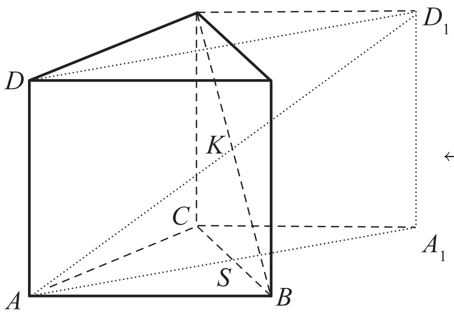
b) Směrnice přímky t je $k = \operatorname{tg} 45° = 1 \Rightarrow t$: $y = x + c$, $c \in \mathsf{R}$.

Soustava rovnic $\left.\begin{array}{l} y = x + c \\ y = \sqrt{6x} \end{array}\right\} (x + c)^2 = 6x \Rightarrow x^2 + (2c - 6)x + c^2 = 0$

$\mathrm{D} = 36 - 24c \Rightarrow$ jedno řešení pro $c = 1{,}5$.
Rovnice přímky t je t: $y = x + 1{,}5$, ta protíná osu x v bodě $\boldsymbol{Q}[\mathbf{-1{,}5}; \mathbf{0}]$.

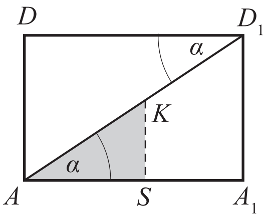
1.2 **b)**

- popis konstrukce rovnostranného trojúhelníku ve v. r. promítání
- průsečík přímky a roviny pomocí průsečnice dvou rovin
- definice odchylky přímky a roviny
- střídavé úhly
- velikost výšky rovnostranného trojúhelníku
- goniometrická funkce
- objem kolmého hranolu
- obsah rovnostranného trojúhelníku
- úprava výrazu s odmocninou



průsečík

$\leftrightarrow DAK \perp \leftrightarrow ABC$
$\Downarrow$
$\leftrightarrow A_1D_1 \parallel \leftrightarrow AD \parallel \leftrightarrow SK$



výška rovnostranného trojúhelníku

c) $\triangle \boldsymbol{AA_1D_1} \Rightarrow |A_1D_1| = a$, $|AA_1| = 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 30°}$.

d) Objem hranolu je $V = S_p \cdot v$

$$\left.\begin{array}{l} S_p = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \\ v = a \end{array}\right\} V = \frac{a^3}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{(4\sqrt{3})^3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 4^2 \cdot 3^{3 \cdot 0{,}5 + 0{,}5} \Rightarrow \boldsymbol{V = 12^2\ \mathrm{cm}^3}.$$ **Číslo V je celé.**

1.3 **a)** n bodů určuje $\binom{n}{2}$ přímek $\Rightarrow$ řešíme **rovnici** $\boldsymbol{\binom{n}{2} = 267}$**, ta nemá v množině N žádný kořen** ($\sqrt{\mathrm{D}} \approx 46{,}2$).

b) $n = 24 \Rightarrow \binom{24}{2} = 276 \Rightarrow$ v textu úlohy **mělo být 276** místo 267.

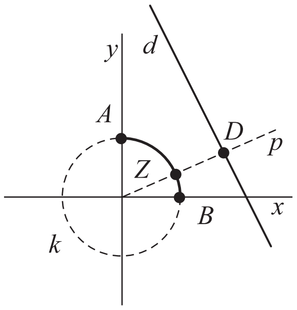
c) m bodů určuje $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$ úseček, z nich m je stran m-úhelníku.
Pravděpodobnost, že náhodně zvolená spojnice je úhlopříčkou, je

$$P(A) = \frac{\frac{m(m-1)}{2} - m}{\frac{m(m-1)}{2}} = \boldsymbol{\frac{m-3}{m-1}}.$$

d) V množině N řešíme nerovnici $\frac{m-3}{m-1} > 0{,}7 \Rightarrow m > \frac{23}{3}$. **Nejmenší počet vrcholů je 8.**

- kombinační číslo
- řešení kvadratické rovnice v N
- rozlišení spojnic (počet příznivých jevů)
- $P(A)$
- úprava výrazu
- řešení nerovnice v N

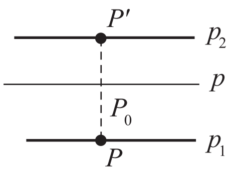
1.4



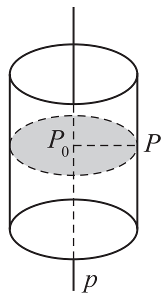
Body Z a D leží na přímce p vedené počátkem kolmo na přímku d
p: $3x - y = 0$
k: $x^2 + y^2 - 10 = 0$, d: $x + 3y - 30 = 0$,
dvě soustavy rovnic $\begin{cases} d \cap p \Rightarrow \boldsymbol{D[3;\ 9]} \\ k \cap p \Rightarrow \boldsymbol{Z[1;\ 3]} \end{cases}$
$Z - D = (-2;\ -6)$
Na plánku je $|ZD| = 2\sqrt{10}$ cm,
tj. ve skutečnosti **asi 630 metrů**.

- analýza textu, plán postupu
- rovnice přímky kolmé k dané přímce
- soustava dvou lineárních rovnic
- soustava lin. a kvadr. rovnice, její řešení v $\mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}^+$
- velikost vektoru
- využití měřítka plánku

1.5 **a)**



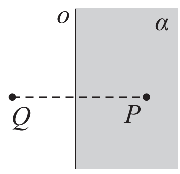
V rovině je množinou **sjednocení přímek p_1 a p_2.**



V prostoru je to **válcová plocha, jejíž osou je přímka p, řídicí kružnice má poloměr P_0P.**

- analýza textu
- dovednost popsat množinu, užít přesnou terminologii
- k dané přímce daným bodem vést rovnoběžku
- k dané přímce určit rovnici jejího obrazu v osové souměrnosti
- rovnice paraboly určené ohniskem a řídicí přímkou
- rovnice osy úsečky
- analytické vyjádření poloroviny

b)



Množinou je **polorovina α, jejíž hraniční přímkou je osa úsečky PQ, $P \in \alpha$.**

c) Množinou je **parabola, jejímž ohniskem je bod Q a řídicí přímkou je q.**

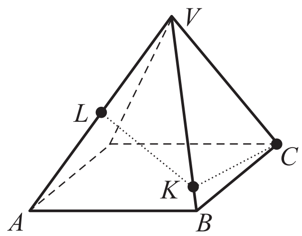
d)
- v úloze **a)** je p: $x + y + 2 = 0$, $P[0;\ 0]$,
  $p_1 \parallel p$, $P \in p_1 \Rightarrow \underbrace{x + y + c = 0 \text{ a } 0 + 2 \cdot 0 + c = 0}$
  $$\boldsymbol{p_1\colon x + y = 0}$$
  p_2 je obraz p_1 v osové souměrnosti s osou p
  $$\boldsymbol{p_2\colon x + y + 4 = 0}.$$
- v úloze **b)** q: $x - 4 = 0$, $Q[0;\ 5] \Rightarrow$ rovnice paraboly bude $(y - n)^2 = -2p(x - m)$.
  Protože vrchol paraboly je $V[2;\ 5]$ a $p = 4$, je rovnice $\boldsymbol{(y - 5)^2 = -8(x - 2)}$.
- v úloze **c)** je osou úsečky PQ přímka o: $y - 2{,}5 = 0$. Množinou je polorovina $\boldsymbol{x - 2{,}5 \leq 0}$.

Téma 2 ČÁSTI PŘÍMKY

2.1 **a)** $\dfrac{y(1-x)}{2-2x} = 2$ **b)** $\left(\sqrt{3}\right)^{x+|x|} - y = 0$ **c)** $\dfrac{x^2-y^2}{xy} = 0$ **d)** $y^2 + 2x + 2|x| = 4$

Částí útvaru, jehož všechny body splňují uvedenou rovnici, je ve všech případech polopřímka. Přesvědčte se o tom a popište ten útvar.
Rozhodněte také, zda rovnici je možno pokládat za vzorec, jímž je definována funkce. Pokud ano, uveďte některé její vlastnosti.

2.2 **a)**



Na povrchu pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$, jehož všechny hrany jsou stejně dlouhé, je vyznačena jedna z „cest“, které vedou ze středu L hrany AV přes hranu BV (bod K) do vrcholu C. Na části sítě tělesa najděte na BV ten bod K_0, pro který je „cesta“ LK_0C nejkratší.
Vypočítejte také její délku.

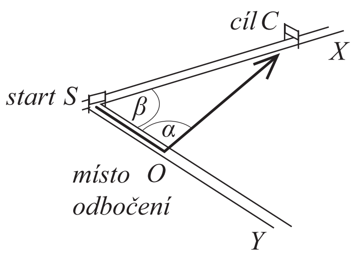
b) Jehlan $ABCDV$ je pravidelný a čtyřboký, všechny jeho hrany jsou shodné úsečky. Zobrazte řez tohoto jehlanu rovinou LKC, je-li L střed hrany AV, K vnitřní bod hrany BV takový, že $|BK| < |VK|$.

2.3 Jsou dány funkce:

a) f: $y = \cos(x + |x|)$
Určete množiny D_f a H_f, načrtněte graf funkce f, stanovte body, v nichž má maximum a minimum. Je to periodická funkce?

b) g: $y = \sin x + |\sin x|$
Určete množiny D_g a H_g, načrtněte graf funkce g, stanovte body, v nichž má maximum a minimum. Je to periodická funkce?

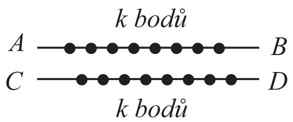
2.4 **a)**



Organizátoři přespolního běhu předpokládají, že start bude na rozcestí S, závodníci nejdříve poběží po přímé lesní cestě (SO), v místě O odbočí a budou pokračovat lesním terénem (OC) do cíle C.
Trať má celkovou délku 5 km, velikost úhlu α ($\measuredangle SOC$) je $120°$, cesty SC a SO svírají odchylku $\beta = 35°$.
Vyjádřete v procentech, jakou část trati absolvují závodníci v lesním terénu.

b) Umístěte polopřímky SX, SY, jejichž odchylka je $\beta = 35°$. Uplatněte stejnolehlost a popište postup konstrukce lomené čáry SOC, která představuje trať závodu. Její délka je 5 cm, $|\measuredangle SOC| = 120°$, $O \in \rightarrow SY$ a $C \in \rightarrow SX$.

2.5



Na každé z obou rovnoběžných úseček AB, CD je umístěno k bodů.

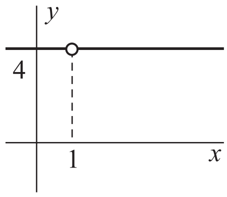
a) Kolik je možné sestrojit takových trojúhelníků, aby jejich vrcholy byly některé tři z umístěných bodů?

b) Určete číslo k, víte-li, že pokud by se počet zvolených bodů na jedné z úseček zvýšil o 1, vzrostl by počet trojúhelníků, které je možné sestrojit, o 70.

Řešení

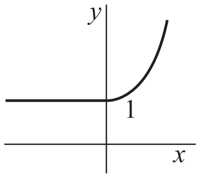
2.1 **a)** $\dfrac{y(1-x)}{2-2x} = 2$

$\boldsymbol{y = 4, x \neq 1}$,
funkce konstanta,



b) $\left(\sqrt{3}\right)^{x+|x|} - y = 0$

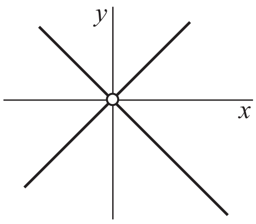
$\boldsymbol{x < 0 \Rightarrow y = 1}$,
$\boldsymbol{x \geq 0 \Rightarrow y = 3^x}$**, neklesající funkce,**



- definiční obor výrazu
- úprava výrazu s absolutní hodnotou
- pojem funkce
- funkce konstanta
- lineární funkce
- exponenciální funkce
- rovnice paraboly

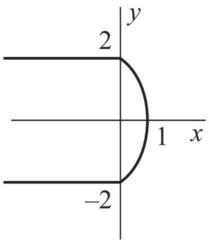
c) $\dfrac{x^2 - y^2}{xy} = 0$

$\boldsymbol{(x+y)(x-y) = 0}$,
$\boldsymbol{x \neq 0, y \neq 0}$,
dvojice kolmých přímek
bez průsečíku,

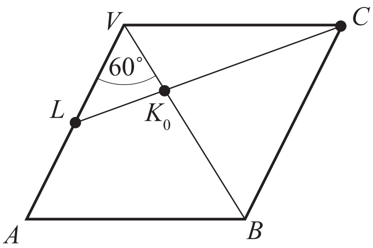


d) $y^2 + 2x + 2|x| = 4$

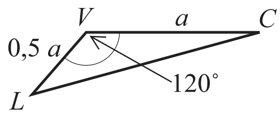
$\boldsymbol{x < 0 \Rightarrow |y| = 2}$ $\Rightarrow$ **dvě rovnoběžné polopřímky**
$\boldsymbol{x \geq 0 \Rightarrow y^2 = -4(x-1)}$ $\Rightarrow$ **parabolický oblouk, [1; 0] je jeho vrchol.**



2.2 **a)**



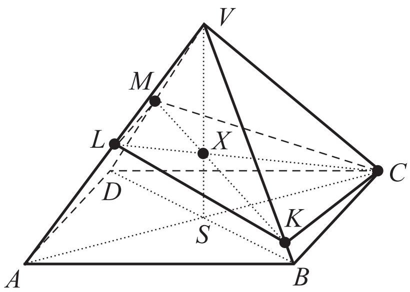
Trajektorie je nejkratší, pokud **bod $\boldsymbol{K_0}$ je vnitřním bodem úsečky $\boldsymbol{LC}$.** Trojúhelníky ABV a BCV jsou rovnostranné a shodné.



- část sítě jehlanu
- úsečka jako nejkratší spojnice dvou bodů
- prvky $\triangle LCV$
- kosinová věta
- úprava výrazu
- řez jehlanu rovinou

$$|LC|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot a \cdot \cos 120° \Rightarrow \boldsymbol{|LC| = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{7}} \textbf{ jednotek}.$$

b)



Řezem je čtyřúhelník $\boldsymbol{LKCM}$.
Jeho vrchol M leží na hraně DV a na polopřímce KX, přitom X je průsečík výšky tělesa VS a úsečky LC.

2.3 **a)** Funkce f: $y = \cos(x + |x|)$:
pro $x < 0$ je $y = 1$, pro $x \geq 0$ je $y = \cos 2x$, $D_f = R$, $H_f = \langle -1; 1 \rangle$,
grafem je sjednocení polopřímky a kosinusoidy s periodou π.
Funkce má **maximum v každém bodě intervalu $\boldsymbol{(-\infty; 0\rangle}$, dále**
pak v bodech $\boldsymbol{x = k\pi, k \in N}$, minimum v bodech $\boldsymbol{x = (2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in N}$.

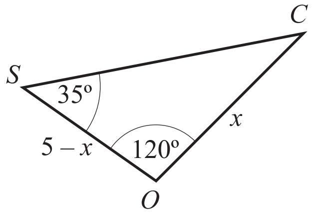
Není periodická.

b) Funkce g: $y = \sin x + |\sin x|$:
pro $\sin x < 0$ je $y = 0$, pro $\sin x \geq 0$ je $y = 2\sin x$, $\mathsf{D}_f = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}_f = \langle 0;\, 2\rangle$, **grafem je sjednocení úseček, které jsou částí osy x** a mají délku π jednotek, **a oblouků sinusoidy.**

Funkce má **maximum v bodech $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$,**
minimum v každém bodě intervalů $\langle (2k-1)\pi;\, 2k\pi\rangle$,
v obou případech je $k \in \mathsf{Z}$.
Je periodická, nejkratší perioda je $p = 2\pi$.

- úprava výrazu s absolutní hodnotou
- stanovení množin D a H
- znázornění nebo popis grafu
- zápis maxima a minima
- posouzení, zda je funkce periodická

2.4 **a)**



$\triangle SOC$, sinová věta

$$\Downarrow$$

$$\frac{x}{\sin 35^\circ} = \frac{5-x}{\sin 25^\circ},\ x \in (0; 5)$$

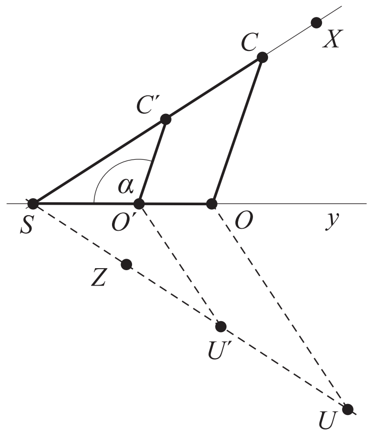
$$x = \frac{5\sin 35^\circ}{\sin 25^\circ + \sin 35^\circ}$$

$$x \approx 2{,}9\,\mathrm{km}$$

Lesním terénem vede asi 58 % trati.

- sinová věta
- vyjádření neznámé z rovnice
- výpočet počtu procent
- volba vzoru
- aplikace charakteristických vlastností stejnolehlosti H: S, vzor X, obraz $\mathsf{H}(X)$ je kolineární trojice bodů, $XY \parallel \mathsf{H}(XY)$

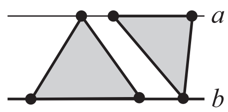
b)



Vrchol S úhlu XSY je střed stejnolehlosti H,
- pomocná lomená čára $SO'C'$
  ($O' \in \rightarrow SY$, $\alpha = 120^\circ \Rightarrow C' \in \rightarrow SX$)
- polopřímka SZ
- U'; $U' \in \rightarrow SZ$, $|SU'| = |SO'| + |O'C'|$
- U'; $U \in \rightarrow SZ$, $|SU| = 5$
- O; H: $U'O' \rightarrow UO$
- C; H: $O'C' \rightarrow OC$

lomená čára SOC

2.5 **a)**



na úsečkách a a b je po k bodech, $k \in \mathsf{N}$

$$\Downarrow$$

počet trojúhelníků s dvěma vrcholy na a je $\dbinom{k}{2} \cdot k$,

počet trojúhelníků s dvěma vrcholy na b je také $\dbinom{k}{2} \cdot k$,

počet trojúhelníků celkem je $\mathbf{2 \cdot \dbinom{k}{2} \cdot k = k^2 \cdot (k-1).}$

- možnosti pro umístění trojúhelníků
- vyjádření jejich počtu kombinačními čísly
- sestavení rovnice
- úprava složitějšího výrazu
- řešení kvadratické rovnice

b) na úsečce a je $(k+1)$ bodů $\Rightarrow$ počet trojúhelníků je $\dbinom{k+1}{2} \cdot k$

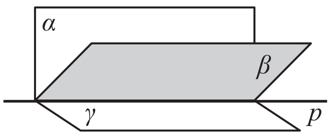
na úsečce b je k bodů $\Rightarrow$ počet trojúhelníků je $\dbinom{k}{2} \cdot (k+1)$

celkový počet je $\dbinom{k+1}{2} \cdot k + \dbinom{k}{2} \cdot (k+1) = \dfrac{1}{2} \cdot (k+1) \cdot k \cdot (2k-1)$.

Řešení rovnice $\dbinom{k+1}{2} \cdot k + \dbinom{k}{2} \cdot (k+1) - 2 \cdot \dbinom{k}{2} \cdot k = 70$
vede ke kvadratické rovnici $3k^2 - k - 140 = 0$,
v množině N je jediné řešení $\boldsymbol{k_1 = 7}$, $k_2 < 0$.

Téma 3 ROVINA

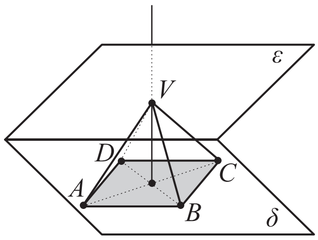
3.1



Určete to reálné číslo d, pro které mají roviny α, β, γ společnou přímku.
Jaké je parametrické vyjádření této přímky?

α: $x + y + 4 = 0$
β: $x - 2y + z + 2 = 0$
γ: $x + 4y - z + d = 0$

3.2



Podstavou čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ je rovnoběžník, který leží v rovině δ: $x + y - 2z = 0$. Jeho vrchol V je bodem roviny ε: $x - 2y + 6 = 0$, další vrcholy jsou body $A[1; 3; ?]$, $B[-1; -1; ?]$, $C[-1; 1; ?]$.

a) Doplňte z-ové souřadnice bodů A, B a C, vypočítejte i souřadnice vrcholu D.

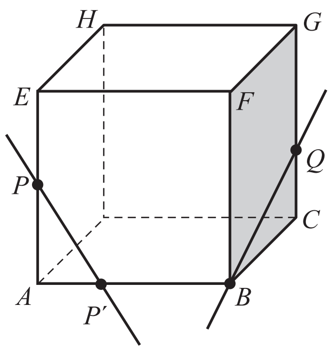
b) Je podstavou tělesa čtverec?

c) Vypočítejte velikost výšky tělesa.

3.3 **a)** V které rovinové souměrnosti $\mathbf{S}(\rho)$ jsou body $M[0; 1; 2]$ a $N[4; 5; 6]$ navzájem vzor a obraz?

b) Kolik existuje osových souměrností $\mathbf{S}(o)$, v nichž $M \to N$ a $N \to M$? Určete parametrické vyjádření aspoň jedné z těchto os.

3.4

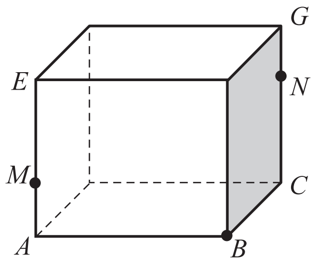


a) Zdůvodněte, proč přímky PP' a BQ jsou mimoběžky, a pak sestrojte tu jejich příčku, která leží v rovině horní podstavy krychle $ABCDEFGH$ ($P \in AE$, $P' \in AB$, $Q \in CG$).

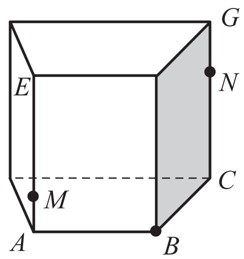
b) p: $x = 3 + t$, $y = t$, $z = t$; $t \in \mathrm{R}$ q: $x = -s$, $y = 1 - s$, $z = 1 + s$; $s \in \mathrm{R}$ α: $x + y + z = 0$

Jaké je parametrické vyjádření příčky r mimoběžek p a q, která leží v rovině α?
Je příčka r k některé z mimoběžek p, q kolmá?

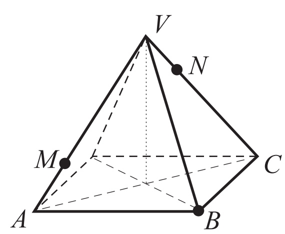
3.5



kvádr $ABCDEFGH$



kolmý hranol $ABCDEFGH$, podstava lichoběžník ($AB \parallel CD$)



pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$

Sestrojte řez tělesa rovinou $\beta = MBN$ a také přímku p, což je průsečnice rovin β a $\leftrightarrow ABC$.
(M je vnitřní bod boční hrany AE, resp. AV, a leží blíže bodu A, N je vnitřní bod boční hrany CG, resp. CV, a leží blíže bodu G, resp. V.)

Řešení

3.1 Hledáme odpověď na otázku, pro které reálné číslo d má soustava rovnic nekonečně mnoho trojic řešení:

$$\begin{aligned} x + y + 4 &= 0 \\ x - 2y + z + 2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad 3y - z + 2 = 0 \\ x + 4y - z + d &= 0 \quad\quad\;\; 3y - z + d - 4 = 0 \end{aligned}$$

$$0 \cdot y + 0 \cdot z = 6 - d \Rightarrow \boldsymbol{d = 6} \Rightarrow \gamma\colon x + 4y - z + 6 = 0$$

Společnou přímku p určíme např. jako průsečnici rovin α a β,
tj. zvolíme $x = t$ a dosadíme do rovnic obou rovin $\Rightarrow y + 4 = -t$ a $-2y + z = -2 - t$,

$$\boldsymbol{p\colon x = t,\ y = -4 - t,\ z = -10 - 3t;\ t \in \mathrm{R}.}$$

- podmínka pro počet řešení soustavy rovnic
- určení hodnoty parametru
- parametrické vyjádření průsečnice dvou rovin

3.2 **a)** Dosazením $\boldsymbol{A}[1;\ 3;\ 2]$, $\boldsymbol{B}[-1;\ -1;\ -1]$, $\boldsymbol{C}[-1;\ 1;\ 0]$,
$B - A = C - D \Rightarrow D = A + C - B \Rightarrow \boldsymbol{D}[1;\ 5;\ 3]$.

b) Jsou sousední strany rovnoběžníku shodné úsečky?
$B - A = (-2;\ -4;\ -3)$, $C - B = (0;\ 2;\ 1) \Rightarrow |B - A| = \sqrt{29}$, $|C - B| = \sqrt{5}$,
$|B - A| \neq |C - B| \Rightarrow ABCD$ **není** čtverec.

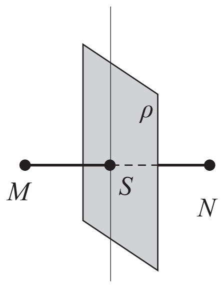
c) Určíme souřadnice vrcholu V a jeho vzdálenost od roviny podstavy tělesa:
střed podstavy $S = \dfrac{A + C}{2} \Rightarrow S[0;\ 2;\ 1]$, bodem S přímka $p \perp \delta \Rightarrow$ • $p\colon x = t$, $y = 2 + t$, $z = 1 - 2t;\ t \in \mathrm{R}$
(přímka p je určena bodem S a normálovým vektorem $\vec{n}_\delta$)

vrchol V je průsečík přímky p a roviny ε (soustava rovnic) $\Rightarrow$ • $V[2;\ 4;\ -3]$,

výšku tělesa určíme jako vzdálenost bodu V a roviny δ nebo jako velikost
vektoru $\vec{u} = V - S \Rightarrow V - S = (2;\ 2;\ -4)$ • $|V - S| = \sqrt{4 + 4 + 16} = \boldsymbol{2\sqrt{6}}$.

- plán postupu řešení
- doplnění souřadnic bodů A, B, C
- výpočet souřadnic vrcholu D
- velikost vektoru
- střed rovnoběžníku
- bodem přímka kolmá k rovině
- průsečík přímky a roviny
- vzdálenost bodu od roviny nebo opět velikost vektoru

3.3 **a)**



$\mathbf{S}(\rho)\colon M \to N$, proto $MN \perp \rho$ a $S = \dfrac{M + N}{2}$
$M[0;\ 1;\ 2]$, $N[4;\ 5;\ 6]$,
- $S[2;\ 3;\ 4]$, $\vec{n}_\rho = N - M = (4;\ 4;\ 4)$
- $\rho\colon 4x + 4y + 4z - d = 0$
- $S \in \rho$

Rovina souměrnosti je $\boldsymbol{\rho\colon x + y + z - 9 = 0}$.

b) Osou souměrnosti je **každá přímka, která leží v rovině ρ a prochází** bodem S. Je to např. **přímka SX, kde X[0; 0; 9]**.

- vlastnosti $\mathbf{S}(\rho)$
- souřadnice středu úsečky
- normálový vektor roviny
- rovnice roviny ρ (obecná nebo parametrické)
- vlastnosti $\mathbf{S}(o)$
- kolmost přímky a roviny
- rovnice přímky, která leží v dané rovině a prochází daným bodem

3.4 **a)** $\leftrightarrow PP' \cap \leftrightarrow EF = \{X\}$, $\leftrightarrow BQ \cap \leftrightarrow FG = \{Y\}$, **příčkou je** $\boldsymbol{\leftrightarrow XY}$.

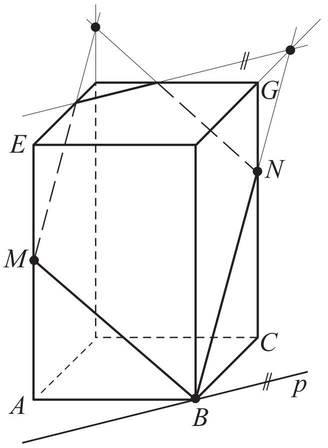
b) Průsečíky přímek p a q s rovinou $\alpha \Rightarrow X[2;\ -1;\ -1]$, $Y[-2;\ -1;\ 3]$,
příčka $r = \leftrightarrow XY \Rightarrow$ $\boldsymbol{r}$**:** $\boldsymbol{x = 2 - 4m}$

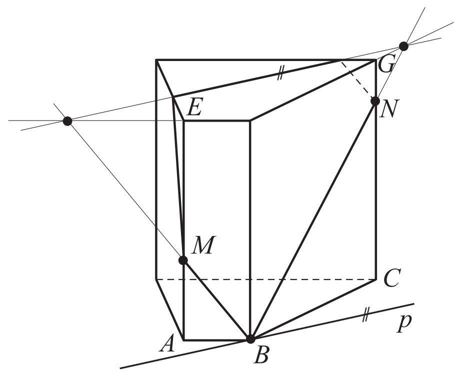
$$\boldsymbol{y = -1}$$
$$\boldsymbol{z = -1 + 4m;\ m \in \mathbb{R}}.$$

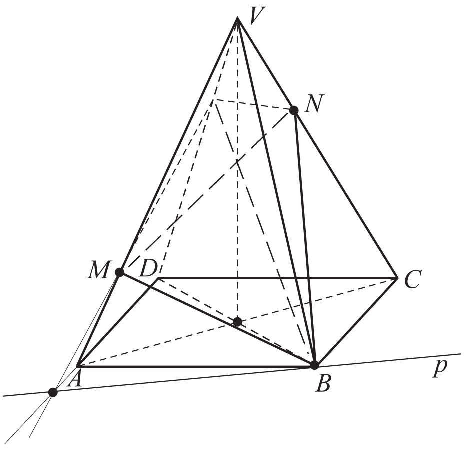
Směrové vektory přímek p, q, r jsou $\vec{u}_p = (1;\ 1;\ 1)$, $\vec{u}_q = (-1;\ -1;\ 1)$,
$\vec{u}_r = (-4;\ 0;\ 4) \Rightarrow \vec{u}_p \cdot \vec{u}_r = 0$, $\vec{u}_q \cdot \vec{u}_r = 8 \Rightarrow \boldsymbol{p \perp r}$.

- proč jsou p, g mimoběžky?
- konstrukce příčky r
- řešení soustav rovnic
- rovnice přímky určené dvěma body
- využití skalárního součinu pro ověření kolmosti přímek

3.5



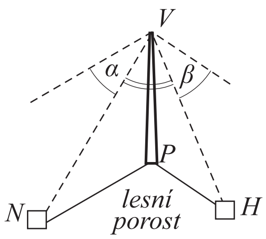




Praktické uplatnění základních vět:
- rovina protíná dvě roviny, které jsou rovnoběžné
- společný bod tří rovin, z nichž každé dvě jsou různoběžné

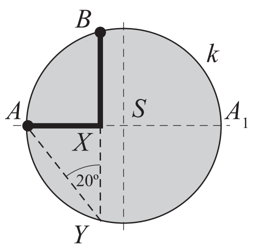
Téma 4 ÚHEL

4.1



Z vrcholu V rozhledny je vidět budova nádraží N v hloubkovém úhlu $\alpha = 4{,}2°$ a turistická chata H v hloubkovém úhlu $\beta = 5{,}3°$. Velikost úhlu $\varepsilon = NVH$ je 82,9°. Podle údaje na informační tabulce je výška rozhledny 44 metrů.
Jak daleko je vzdušnou čarou chata od nádraží?
(Výpočet zaokrouhlujte na desítky metrů.)

4.2



V kruhu se středem S je umístěn průměr AA_1 a tětiva BY jeho hraniční kružnice k $(AA_1 \perp BY)$, X je průsečík AA_1 a BY.

a) Je-li $|\sphericalangle AYB| = 20°$, určete $|\sphericalangle ASB|$.

b) Jaké těleso vznikne rotací útvaru ohraničeného menším kružnicovým obloukem AB a úsečkami AX, BX kolem průměru AA_1? Vypočítejte jeho objem, je-li poloměr kruhu 10 cm.
(Výpočet zaokrouhlujte na jedno desetinné místo.)

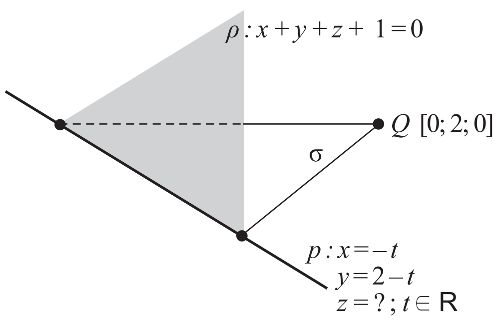
4.3 **a)** Velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku jsou čtyři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 2$. Je to konvexní útvar?

b) Velikosti vnitřních úhlů n-úhelníku jsou členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 4$, nejmenší je 128°. Kolik má takový konvexní n-úhelník vrcholů a jak velký je jeho největší vnitřní úhel?

4.4 **a)** Vnitřní úhly trojúhelníku ABC jsou $\alpha = 75°$, $\beta = 50°$. Střed S strany a má od strany c vzdálenost $d = 2{,}8$ cm. Sestrojte ten trojúhelník.

b) Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC. (Výpočet zaokrouhlujte na jedno desetinné místo.)

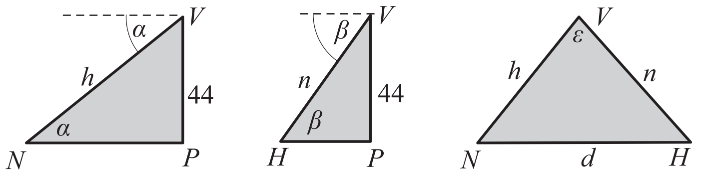
4.5



Přímka p je průsečnicí rovin ρ a σ, v níž leží bod Q.
Jaká je odchylka těchto dvou rovin?
(Další informace jsou k dispozici v náčrtku.)

Řešení

4.1 Vzdálenost NH určíme jako velikost strany $\triangle NHV$.



- plán postupu řešení
- hloubkový úhel
- střídavé úhly
- funkce sinus v pravoúhlém trojúhelníku
- kosinová věta

$\sin 4{,}2^\circ = \dfrac{44}{h}$ $\quad h \approx 600$

$\sin 5{,}3^\circ = \dfrac{44}{n}$ $\quad n \approx 480$

$d = \sqrt{600^2 + 480^2 - 2 \cdot 600 \cdot 480 \cdot \cos 82{,}9^\circ}$

$\boldsymbol{d \approx 720}$ **metrů**.

4.2 **a)** $\measuredangle AYB$ je jedním z obvodových úhlů příslušejících menšímu kružnicovému oblouku AB, $\measuredangle ASB$ je odpovídající středový úhel, proto $|\measuredangle ASB| = 40°$.

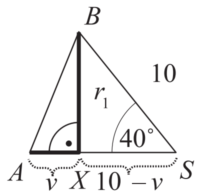
b) Počítáme objem **kulové úseče**

$v = AX$ je její výška $\quad \Rightarrow \cos 40^\circ = \dfrac{10 - v}{10} \quad \Rightarrow v = 2{,}3$ cm,

$r_1 = BX$ je její podstava $\Rightarrow \sin 40^\circ = \dfrac{r_1}{10} \quad \Rightarrow r_1 = 6{,}4$ cm,

$V = \dfrac{\pi v}{6}\left(3r_1^2 + v^2\right) = \dfrac{2{,}3\pi}{6} \cdot \left(3 \cdot 6{,}4^2 + 2{,}3^2\right) \Rightarrow V \approx 49{,}1\pi\ \text{cm}^3$,

tj. $\boldsymbol{V \approx 154{,}3}$ **cm³**.



- obvodový a středový úhel příslušející témuž oblouku
- určení rotačního tělesa
- užití goniometrické funkce
- výpočet objemu tělesa

4.3 **a)** $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \alpha(1 + 2 + 4 + 8) = 360 \Rightarrow \alpha = 24^\circ$, $\beta = 48^\circ$, $\gamma = 96^\circ$, $\delta = 192^\circ$, takový 4úhelník **není konvexní**.

b) Velikosti vnitřní úhlů n-úhelníku jsou
$\alpha_1 = 128^\circ$, $\alpha_2 = 132^\circ$, $\alpha_3 = 136^\circ$, ... $\alpha_n = 128^\circ + (n-1) \cdot 4^\circ = (124 + 4n)^\circ$,
jejich součet ve stupních je $s = \dfrac{n}{2} \cdot (128 + 124 + 4n)$, ale také $(n-2) \cdot 180$.

$$\Downarrow$$

V množině N řešíme rovnici $\dfrac{n}{2} \cdot (128 + 124 + 4n) = (n-2) \cdot 180$,
tj. $n^2 - 27n + 180 = 0$, D $= 9$, $n_1 = 12$, $n_2 = 15$.
Pro $n = 12$ je **největší úhel** $\boldsymbol{\alpha_{12} = 172^\circ}$ $\Rightarrow$ dvanáctiúhelník konvexní je,
pro $n = 15$ je to $\alpha_{15} = 184^\circ \Rightarrow$ patnáctiúhelník nikoli.
Je to dvanáctiúhelník.

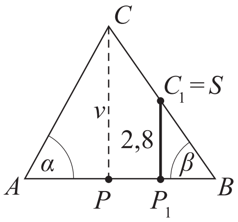
- vyjádření po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti
- konvexní čtyřúhelník
- vyjádření n-tého členu aritmetické posloupnosti
- součet jejích prvních n členů
- součet vnitřních úhlů n-úhelníku
- rovnice a její řešení
- ověření konvexnosti útvaru

4.4 **a)**
- pomocný trojúhelník $A_1B_1C_1$ (vnitřní úhly α a β)
- $S_1 = S$; střed B_1C_1 a také *střed stejnolehlosti* **H**
- $X_1 \in A_1B_1$; $SX_1 \perp A_1B_1$
- $X \in \rightarrow SX_1$; $|SX| = 2{,}8$ cm
- p; $p \parallel A_1B_1$, $X \in p$
- A, B; **H**: $A_1 \rightarrow A$, $B_1 \rightarrow B$, $A \in p$, $B \in p$
- C; **H**: $C_1 \rightarrow C$

- $\triangle$ ***ABC***

- podobnost trojúhelníků podle *uu*
- volba středu stejnolehlosti **H**
- $p \parallel$ **H**(p)
- kolineárnost bodů S, A, **H**(A)
- uplatnění koeficientu podobnosti pro výpočet obsahu trojúhelníku
- goniometrické funkce

b)



$\triangle CPB \sim \triangle SP_1B$ s koeficientem $k = 0{,}5$:

- $v = 5{,}6$ cm
- $\operatorname{tg} 75° = \dfrac{v}{AP} \Rightarrow AP = 1{,}5$ cm
- $\operatorname{tg} 50° = \dfrac{v}{PB} \Rightarrow PB = 4{,}7$ cm

$\Bigg\}$ $S = \dfrac{1}{2}(AP + PB) \cdot v$

$\boldsymbol{S = 17{,}4\ \mathrm{cm}^2}$.

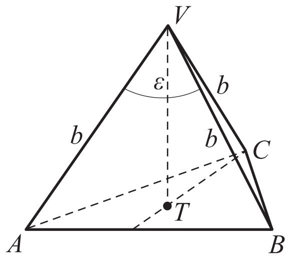
4.5

- ρ: $x + y + z + 1 = 0 \Rightarrow$ normálový vektor roviny ρ je $\vec{n}_\rho = (1;\ 1;\ 1)$,
- určíme rovnici pro z-ovou souřadnici bodů přímky p:
  $p \subset \rho$: $(-t) + (2 - t) + z + 1 = 0 \Rightarrow z = -3 + 2t$,
- normálový vektor roviny σ je $\vec{n}_\sigma = \vec{p} \times \vec{q}$, kde
  $\vec{p} = (-1;\ -1;\ 2)$ je směrový vektor průsečnice p,
  vektor $\vec{q}$, který není s $\vec{p}$ rovnoběžný, je další vektor umístěný v rovině σ, např. $\vec{q} = Q - P$, $Q[0;\ 2;\ 0]$, $P[0;\ 2;\ -3] \Rightarrow$
  $\Rightarrow \vec{q} = (0;\ 0;\ 3)$, $\vec{n}_\sigma = \vec{p} \times \vec{q} = (-3;\ 3;\ 0)$,
- $\left.\begin{array}{l}\vec{n}_\rho = (1;\ 1;\ 1)\\[1ex] \vec{n}_\sigma = (-3;\ 3;\ 0)\end{array}\right\}$ odchylka rovin ρ a σ je $\cos\alpha = \dfrac{|1 \cdot (-3) + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{18}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\rho \perp \sigma}$.

> - doplnění rovnice přímky p
> - co je nutné znát k výpočtu odchylky dvou rovin
> - určení dvou nezávislých vektorů roviny
> - výpočet vektorového součinu
> - uplatnění vzorce pro odchylku dvou vektorů

Téma 5 TROJÚHELNÍK

5.1



V pravidelném trojbokém jehlanu mají všechny boční hrany velikost b a svírají úhel ε, $b > 0$, $\varepsilon \in (0°; 120°)$.

a) Pomocí proměnných b a ε vyjádřete povrch tohoto tělesa.

b) Uplatněte získaný vzorec a určete povrch jehlanu, je-li $b = 8$ cm a jsou-li boční stěny pravoúhlé trojúhelníky.

5.2 Je umístěna kružnice $k(S, r)$ a její bod C, ve vnitřní oblasti této kružnice je pak bod T ($|CT| = m$, $m > 0$).

a) Popište postup konstrukce všech trojúhelníků ABC vepsaných kružnici k, jejichž těžištěm je bod T.

b) Jakou podmínku musí splňovat kladné číslo m, má-li mít úloha aspoň jedno řešení?

c) Je možné takový trojúhelník sestrojit, má-li kružnice rovnici $x^2 + y^2 = 16$ a umístěné body jsou $C[?; 4]$ a $T[3; 0]$?

d) Kružnice k a její bod C je umístěn. Jak nyní umístíte bod T, chcete-li, aby sestrojený trojúhelník byl rovnoramenný a jeho základnou byla strana AB?

5.3 **a)** Jedna z úloh testu byla „Obsah $\triangle ABC$ je $S = 12$ cm^2, dvě z jeho stran mají velikost 6 cm a 8 cm. Určete jeho obvod.“ Zbyšek vypočítal, že $o \approx 18{,}1$ cm, Vojtěch uvádí v testu, že $o \approx 27{,}5$ cm. Který z výsledků je chybný?

b) Je $\triangle ABC$ tupoúhlý?

5.4 Vrcholy A, B rovnoramenného trojúhelníku ABC jsou body přímky p: $x + y - 2 = 0$, vrchol B je současně bodem osy x. Vrchol, který leží proti základně trojúhelníku, je $C[3; 7]$.

a) Určete souřadnice vrcholu A.

b) Jakou rovnici má parabola, jejíž osa je rovnoběžná s osou y, s vrcholem v těžišti $\triangle ABC$, prochází-li bodem B?

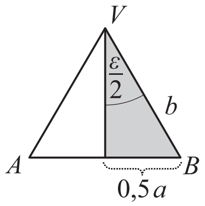
5.5 V $\triangle ABC$ mají strany a a c délku 12 a 20 cm, pro jeho vnitřní úhly platí $\gamma = 2\alpha$.

a) Je to tupoúhlý trojúhelník? Aniž určujete délku strany b, zdůvodněte, proč jeho obvod je větší než 52 cm.

b) Vypočítejte poloměr kružnice tomuto trojúhelníku opsané.

Řešení

5.1 **a)**



- obsah podstavy $S_p = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = b^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}$
- obsah pláště $S_{pl} = 3 \cdot \frac{1}{2} b^2 \cdot \sin \varepsilon$

$\Downarrow$

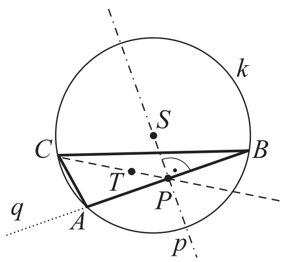
- povrch jehlanu $S = S_p + S_{pl} = \boldsymbol{b^2 \cdot \left(\sqrt{3} \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{2} \cdot \sin \varepsilon\right)}$.

$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{0{,}5a}{b} \Rightarrow a = 2b \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2}$

b) $b = 8,\ \varepsilon = 90° \Rightarrow S = 64 \cdot \left(\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot 1\right) \approx$ **151,4 cm²**.

- výpočet velikosti podstavné hrany
- obsah rovnostranného trojúhelníku
- obsah trojúhelníku *sus*
- povrch jehlanu, úprava výrazu
- výpočet podle vzorce

5.2 **a)** Popis konstrukce:



- k, S, C, T
- $\rightarrow CT$
- $P;\ P \in \rightarrow CT,\ |CP| = 1{,}5 \cdot |CT|$
- $p = \leftrightarrow PS$
- $q\colon q \perp p,\ P \in q$
- $A, B;\ q \cap k = \{A, B\}$

$\boldsymbol{\triangle ABC}$

- poměr, v němž dělí těžiště těžnici v trojúhelníku
- průměr kružnice jako její osa souměrnosti
- postup konstrukce
- vyjádření podmínky pro existenci řešení
- aplikace vyjádřené podmínky pro konkrétní zadání (bod leží na kružnici, velikost vektoru)
- vlastnosti rovnoramenného trojúhelníku

b) Aspoň jedno řešení $\Rightarrow$ bod P je bodem vnitřní oblasti kružnice $\Rightarrow 1{,}5m < 2r \Rightarrow \boldsymbol{m < \frac{4}{3}r}$.

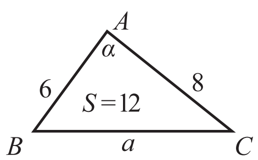
c) $k\colon x^2 + y^2 = 16$ a $C \in k \Rightarrow C[0;\ 4] \Rightarrow m = |C - T| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$$\left.\begin{array}{r} T[3;\ 0] \qquad m = 5 \\ r = 4 \end{array}\right\} \text{ platí } 5 < \frac{4}{3} \cdot 4?$$

Ano, trojúhelník je možné sestrojit.

d) Má-li být sestrojený trojúhelník rovnoramenný se základnou AB, pak **musí body C, S, T ležet v přímce**.

5.3 **a)**



$12 = 0{,}5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin \alpha$

$\sin \alpha = 0{,}5$

$\alpha_1 = 30°$ $\qquad$ $\alpha_2 = 150°$

$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

$a = \sqrt{6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 30°} \approx 4{,}1$, $\qquad$ $a = \sqrt{6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 150°} \approx 13{,}5$,

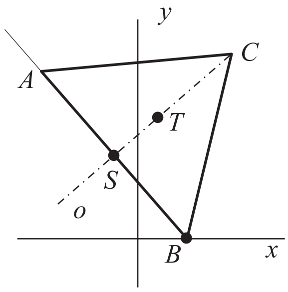
$o \approx 18{,}1$ cm $\qquad$ $o \approx 27{,}5$ cm

Oba mají pravdu. Úloha má dvě řešení.

- goniometrická rovnice v $(0°;\ 180°)$
- kosinová věta
- výpočet obvodu
- výpočet největšího úhlu

b) Trojúhelník se stranou $a = 13{,}5$ cm je tupoúhlý $(\alpha = 150°)$. V druhém trojúhelníku leží největší vnitřní úhel proti straně, která má délku 8 cm $\Rightarrow 8^2 = 4{,}1^2 + 6^2 - 2 \cdot 4{,}1 \cdot 6 \cdot \cos \beta \Rightarrow \beta \approx 103{,}1°$. **Oba trojúhelníky jsou tupoúhlé.**

5.4 **a)**



- $B[2;\ 0]$
- $C \in o,\ o \perp p$
  $o\colon x - y + 4 = 0$
- $o \cap p \Rightarrow S,\ S[-1;\ 3]$
- $S = \dfrac{A+B}{2} \Rightarrow A = 2S - B$

$\boldsymbol{A[-4;\ 6]}$.

- plán postupu řešení
- bod B
- rovnice osy úsečky
- soustava rovnic
- obraz bodu ve středové souměrnosti
- těžiště trojúhelníku
- vrcholová rovnice paraboly

b) $T = \dfrac{A+B+C}{3} \Rightarrow T\left[\dfrac{1}{3};\ \dfrac{13}{3}\right]$,

rovnice paraboly je $\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 = -2p \cdot \left(y - \dfrac{13}{3}\right)$, B je bod paraboly $\Rightarrow 2p = \dfrac{25}{39}$

$$\boldsymbol{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{25}{39} \cdot \left(y - \frac{13}{3}\right)}.$$

5.5 **a)** Podle sinové věty je $\dfrac{12}{\sin\alpha} = \dfrac{20}{\sin\gamma} \Rightarrow \dfrac{12}{\sin\alpha} = \dfrac{20}{\sin 2\alpha}$

$$12 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = 20\sin\alpha$$

$0° < \alpha < 180° \Rightarrow \sin\alpha \neq 0 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{5}{6} \Rightarrow \alpha \approx 33{,}5°,\ \gamma \approx 67° \Rightarrow \boldsymbol{\beta < 90°}$

Trojúhelník **není tupoúhlý**.
Úhel β je největší, proto i **strana *b* bude nejdelší**,
její délka bude větší než 20 cm $\Rightarrow$
$\Rightarrow \boldsymbol{12 + 20 + b > 52}$.

b) $2r = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{12}{\sin 33{,}5°} \Rightarrow \boldsymbol{r = 10{,}9\ \mathrm{cm}}$.

- sinová věta
- goniometrická rovnice řešená v množině $(0;\ \pi)$
- trojúhelníková nerovnost
- využití sinové věty pro výpočet r

Téma 6 PRAVOÚHLÝ TROJÚHELNÍK

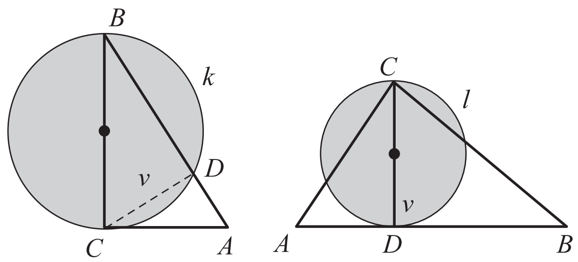
6.1 **a)** Všechny hrany pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ a pravidelného čtyřbokého jehlanu $KLMNV$ jsou shodné úsečky. Přirozenými čísly vyjádřete poměr objemů obou těles.

b) Je-li α odchylka boční hrany od roviny podstavy čtyřstěnu a β odchylka boční hrany od roviny podstavy jehlanu, platí $\alpha < \beta$?

6.2 **a)** Vypočítejte velikost úhlů přilehlých k přeponě c pravoúhlého trojúhelníku ABC, platí-li pro jeho strany $9(a^2 - b^2) = 7c^2$.

b) Má-li kružnice opsaná tomuto trojúhelníku poloměr $r = 5$ cm, jaký je jeho obsah?

6.3

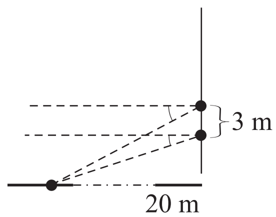


Trojúhelník ABC je pravoúhlý, $|AB| = m$, $m > 0$, D je pata výšky. Bod D dělí přeponu AB na dvě úsečky tak, že $|AD| = 0{,}25m$.

a) Pomocí parametru m vyjádřete velikost poloměrů r_k kruhu k, jehož průměrem je odvěsna BC, a r_l kruhu l s průměrem CD.

b) Ověřte výpočtem, že oba poloměry jsou větší než poloměr kruhu vepsaného trojúhelníku ABC. Řešte pro $|AB| = 8$ cm.

6.4



Dvacet metrů od paty domu je přívoz. V letním období tu převozník zajišťuje přepravu osob na druhou stranu řeky. Vlastík a Zlata se nemohli dohodnout, jak je řeka v tomto místě široká. Děda jim navrhl, ať to tedy vypočítají…

Z okna ve 2. patře domu je vidět na druhém břehu kamenný sloupek, ke kterému převozník pramici přivazuje, v hloubkovém úhlu $\varepsilon = 9°$, z okna 3. patra, tj. výš o 3 metry, v hloubkovém úhlu $\delta = 11°$. Jak je řeka v tomto místě široká?
Je to víc než 60 metrů, jak odhadovala Zlata, anebo nejvýš 50 metrů, což tvrdil Vlastík…?

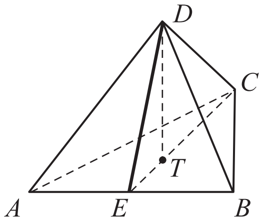
6.5 **a)** „Jestliže je jedním z krajních bodů těžnice trojúhelníka střed kružnice jemu opsané, pak je tento trojúhelník pravoúhlý.“ Dokažte.

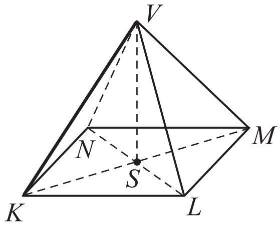
b) Využijte tuto větu pro konstrukci trojúhelníku ABC, který je pravoúhlý, přepona AB má délku 6 cm, velikost těžnice t_a je t cm ($t > 0$).
Popište postup konstrukce a určete množinu těch t, pro něž má úloha aspoň jedno řešení.

Řešení

6.1 **a)** Všechny hrany obou těles mají velikost a.

Obsah rovnostranného trojúhelníku o straně a je $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, jeho výška je $w = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.





- obsah rovnostranného trojúhelníku
- Pythagorova věta pro výpočet tělesových výšek
- úprava výrazů s odmocninami
- vyjádření poměru pomocí celých čísel
- odchylka přímky a roviny
- funkce tangens

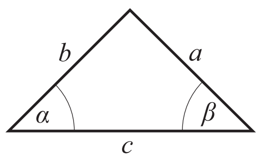
$V_č = \frac{1}{3}S_p \cdot v_1,\qquad V_j = \frac{1}{3}S_p \cdot v_2$

$v_1 = |DT| = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2},\qquad v_2 = |VS| = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2}$

$V_č = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3,\qquad V_j = \frac{1}{3}a^2\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3 \Rightarrow \boldsymbol{V_č : V_j = 1 : 2}$

b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{|DT|}{|BT|} = \frac{\frac{a}{3}\cdot\sqrt{6}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}} = \sqrt{2},\qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{|VS|}{|LS|} = \frac{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{2}}{\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha < \beta}$ **neplatí**.

6.2 **a)** $9(a^2 - b^2) = 7c^2 \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} - \frac{b^2}{c^2} = \frac{7}{9} \Rightarrow \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \frac{7}{9},\ \alpha \in (0°;\ 90°)$



$\cos 2\alpha = -\frac{7}{9} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 70{,}5°,\ \beta = 19{,}5°}$

Jiný postup:

Soustava rovnic $9(a^2 - b^2) = 7c^2$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = 8b^2 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \sqrt{8}$ atd.

- úprava rovnice s cílem získat poměr stran
- goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku
- řešení goniometrické rovnice v množině
- sinová věta a poloměr kružnice opsané trojúhelníku

b) $\left.\begin{array}{l}\frac{a}{\sin\alpha} = 2r\\ \frac{b}{\sin\beta} = 2r\end{array}\right\}\ S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\cdot 2r\sin\alpha\cdot 2r\sin\beta = 2\cdot 5^2\cdot\sin 70{,}5\cdot\sin 19{,}5° \approx \mathbf{15{,}7\ cm^2}.$

6.3 **a)** Pro výpočet poloměru r_k využijeme Euklidovu větu o odvěsně:

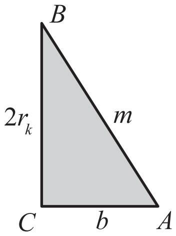
$|BC|^2 = |AB|\cdot|BD| \Rightarrow |BC|^2 = m\cdot\frac{3}{4}m = \frac{3}{4}m^2 \Rightarrow \boldsymbol{r_k = \frac{m}{4}\cdot\sqrt{3}}.$

Pro výpočet poloměru r_l využijeme Euklidovu větu o výšce:

$|CD|^2 = |AD|\cdot|BD| \Rightarrow |CD|^2 = \frac{1}{4}m\cdot\frac{3}{4}m = \frac{3}{16}m^2 \Rightarrow \boldsymbol{r_l = \frac{m}{8}\cdot\sqrt{3}}.$

- využití Euklidových vět
- výpočet poloměrů
- výpočet obvodu trojúhelníku
- výpočet obsahu trojúhelníku
- výpočet ρ
- porovnání poloměrů

b)



Pro výpočet poloměru ρ trojúhelníku vepsaného kruhu použijeme vzorec

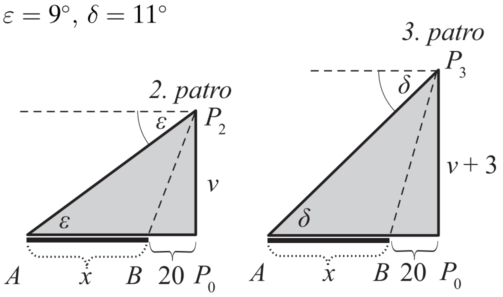
$$\rho = \frac{S_\triangle}{s},\ \text{kde}\ s = \frac{a+b+c}{2}.$$

- $a = 2r_k = 4\sqrt{3}$ cm
- $c = m = 8$ cm
- $b = 4$ cm
- $s = (6 + 2\sqrt{3}) \approx 9{,}5$ cm
- $S_\triangle = \frac{1}{2}ab = 8\sqrt{3}$ cm^2
- $\rho = \frac{16}{19} \cdot \sqrt{3} \approx 1{,}5$ cm

$$\underbrace{}$$

$\rho \approx 1{,}5$ cm, $r_k = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5$ cm, $r_l = \sqrt{3} \approx 1{,}7$ cm,
$\rho < r_l < r_k$.

6.4 $\varepsilon = 9°$, $\delta = 11°$



- náčrtek situace, správné označení hloubkových úhlů
- střídavé úhly
- využití goniometrické funkce
- soustava rovnic
- vyjádření neznámé
- výpočet šířky řeky

$\operatorname{tg}\varepsilon = \dfrac{v}{x + 20}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\delta = \dfrac{v + 3}{x + 20}$

$v = (x + 20) \cdot \operatorname{tg} 9°$ $\qquad$ $v = (x + 20) \cdot \operatorname{tg} 11° - 3 \Rightarrow x + 20 = \dfrac{3}{\operatorname{tg} 11° - \operatorname{tg} 9°} \Rightarrow \boldsymbol{x \approx 63{,}3}$

Zlata odhadla šířku docela přesně, řeka je v tomto místě široká přibližně 63 metrů.

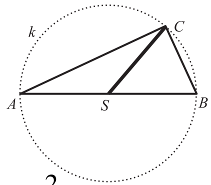
6.5 **a)** Platí: vrcholy trojúhelníku ABC leží na kružnici $k(S, r)$ a $|CS| = r = |t_c|$

$\Downarrow$

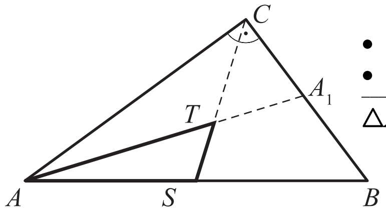
S je střed AB a k je Thaletova kružnice s průměrem AB

$\Downarrow$

$\triangle ABC$ je pravoúhlý.



b)



- AST; $|AS| = 3$, $|TS| = \frac{1}{3}|AS| = 1$, $|AT| = \frac{2}{3}t$
- C; $|SC| = 3 \cdot |TS| = 3$
- B; $|AB| = 2 \cdot |AS| = 6$

$\triangle ABC$

- využití Thaletovy kružnice
- pochopení, jak bude v konstrukci věta využita
- vlastnosti těžiště trojúhelníku
- postup konstrukce
- využití trojúhelníkové nerovnosti pro určení podmínky

Podmínka řešitelnosti vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti pro $\triangle AST$:

$|AS| - |TS| < \frac{2}{3} \cdot |AA_1| < |AS| + |TS| \Rightarrow 3 - 1 < \frac{2}{3}t < 3 + 1 \Rightarrow \boldsymbol{t \in (3; 6)}$.

Téma 7 ČTYŘÚHELNÍK

7.1 **a)** Popište postup konstrukce rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$, je-li kladné číslo a velikost jeho základny AB, kladné číslo e velikost úhlopříček AC a BD, ε velikost jejich odchylky.

b) Zdůvodněte, proč je možné určit obsah takového lichoběžníku, pokud známe pouze čísla e a ε. (Vypočítejte jej pro $e = 10$ cm, $\varepsilon = 30°$.)

c) Pokud je $a = \frac{1}{2}e$ a $\varepsilon = 90°$, porovnejte velikosti základen lichoběžníku. Platí $2 \cdot |AB| > |CD|$?

7.2 Jedna strana deltoidu $ABCD$, jehož dva vnitřní úhly jsou pravé, je dlouhá $4\sqrt{5}$ cm, AC je jeho osa souměrnosti. Úhlopříčky se protínají v bodě S tak, že jedna z nich je bodem S rozdělena na dvě úsečky, jejichž délky jsou v poměru 1 : 4.

a) Popište konstrukci aspoň jednoho takového deltoidu.
Uveďte také, jak sestrojíte úsečku, která má délku $4\sqrt{5}$ cm.

b) Vysvětlete, proč zadání úlohy není jednoznačné, a proto uvedené podmínky splňují dva deltoidy, které nejsou shodné. Vypočítejte obvod obou čtyřúhelníků.

7.3 V krychli $ABCDEFGH$ je na hraně BC ($|BC| = 4$ cm) umístěn bod K ($|BK| = 1$ cm).

a) Zobrazte řez krychle rovinou $\varepsilon = EKG$.

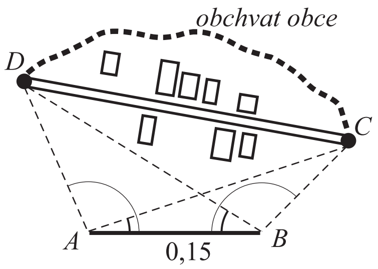
b) Jak se liší obsah řezu od obsahu stěny krychle?

c) Je řez n-úhelník, kterému je možné vepsat nebo opsat kružnici?

7.4 **a)** Uveďte alespoň dva postupy, jimiž ověříte, že body $A[1; 1; 0]$, $B[2; 0; -1]$, $C[0; -2; 3]$, $D[0; 0; 2]$ jsou vrcholy čtyřúhelníku.

b) Rozhodněte, zda
- je $ABCD$ rovnoběžník,
- některé dvě jeho strany jsou shodné,
- jsou jeho úhlopříčky AC, BD k sobě kolmé.

7.5



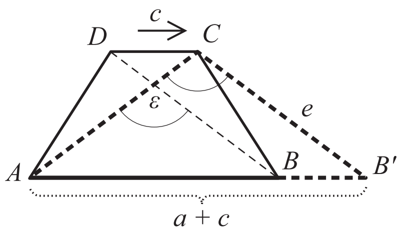
Původní trasa nově budované komunikace počítala s průjezdem na okraji obce. S tím však občané nesouhlasili, a tak by měl být plánovaný přímý úsek DC nahrazen obchvatem.

Vytýčené body A, B na plánku mají vzdálenost je 0,15 km a dále bylo změřeno, že $|\sphericalangle CAB| = 17°$, $|\sphericalangle ABC| = 115°$, $|\sphericalangle ABD| = 22°$, $|\sphericalangle DAB| = 129°$.

Podle informace projektantů bude obchvat o 78 % delší než původně plánovaný průjezd obcí. Bude obchvat delší než půl kilometru?

Řešení

7.1 **a)** V posunutí $T(DC)$ je obrazem bodu B bod B'.

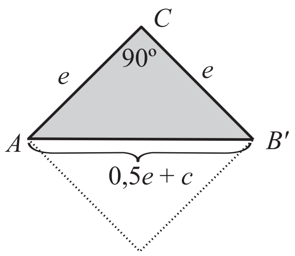


$\triangle AB'C$ je rovnoramenný
$(|AC| = |B'C| = e,\ |\sphericalangle ACB'| = \varepsilon)$.

b) Podle věty *sss* platí $\triangle ACD \cong \triangle CB'B$.
Proto jsou obsahy lichoběžníku $ABCD$
a $\triangle AB'C$ stejné $\Rightarrow$ $\boldsymbol{S = 0{,}5 \cdot e^2 \cdot \sin\varepsilon}$.
Pro $e = 10$ cm a $\varepsilon = 30°$ je $S = 25\ \text{cm}^2$.

Postup konstrukce lichoběžníku $ABCD$ je patrný z obrázku.

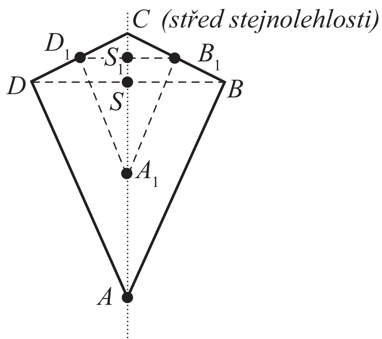
c) Pro výpočet velikosti základny $c = CD$ v případě, že $a = \dfrac{1}{2}e$
a úhlopříčky lichoběžníku jsou k sobě kolmé, uplatníme náčrtek z **a)**:



$|AB'|$ je úhlopříčka ve čtverci,
jeho strana je e
$\Downarrow$
$AB' = 0{,}5e + c = e\sqrt{2}$
$c = e \cdot (\sqrt{2} - 0{,}5) \approx 0{,}9e$
$2|AB| = e \Rightarrow$ **$2|AB| > |CD|$ platí**.

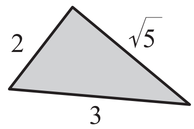
- význam posunutí pro sestrojení lichoběžníku
- souhlasné úhly o velikosti ε
- postup konstrukce útvaru
- zdůvodnění rovnosti obsahů lichoběžníku a trojúhelníku
- výpočet obsahu
- výpočet velikosti druhé základny

7.2 **a)**



Při konstrukci deltoidu uplatníme stejnolehlost **H** se středem C:
- CA_1; $|CA_1| = 5$ cm
- S_1; $S_1 \in CA_1$, $|CS_1| = 1$ cm
- k; Thaletova kružnice s průměrem CA_1
- p; $p \perp CA_1$, $S_1 \in p$
- B_1, D_1; $p \cap k = \{B_1, D_1\}$
- deltoid $A_1B_1CD_1$
- D; $D \in \to CD_1$, $|CD| = 4\sqrt{5}$ cm

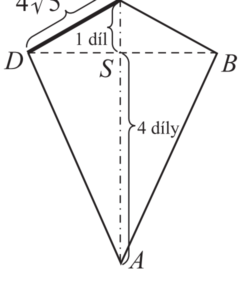
- $ABCD$; **H**: $A_1B_1CD_1 \to \boldsymbol{ABCD}$



Pomocnou úsečku, která má délku $\sqrt{5}$ cm, sestrojíme **podle některé z Euklidových vět**, anebo jako **aplikaci Pythagorovy věty** $(5 = 3^2 - 2^2)$.

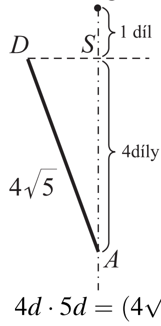
b) Dvojznačnost zadání úlohy spočívá v tom, že neurčuje, zda strana o dané délce je kratší nebo delší stranou deltoidu.

- 1. možnost:



$\triangle ACD$:
(Euklidova věta o odvěsně)
$d \cdot 5d = (4\sqrt{5})^2 \Rightarrow d = 4$
$|AS| = 16$ cm, $|CS| = 4$ cm
$\Downarrow$
$|AD|^2 = |AC| \cdot |AS|$
$|AD| = \sqrt{20 \cdot 16} = 8\sqrt{5}$ cm

- 2. možnost:

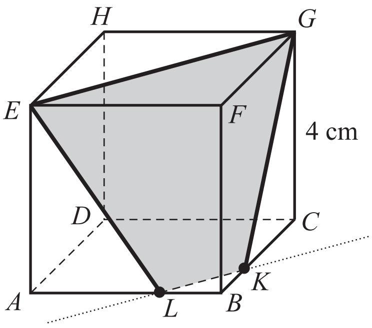


$4d \cdot 5d = (4\sqrt{5})^2$
$d = 2$

- náčrtek s uplatněním charakteristických vlastností deltoidu
- jak sestrojit úsečku o délce $\sqrt{5}$
- popis konstrukce útvaru
- vysvětlení nejednoznačnosti zadání úlohy $\Rightarrow$ důsledek pro další postup řešení
- výpočet další strany a obvodu deltoidu

Obvod deltoidu je $24 \cdot \sqrt{5} \approx$ **53,7 cm** nebo $12\sqrt{5} \approx$ **26,8 cm**.

7.3 **a)**



$EG \parallel LK \Rightarrow$ **řezem je lichoběžník *LKGE*.**

- řez krychle rovinou
- vlastnosti útvaru, který je řezem
- výpočet velikostí stran řezu
- stanovení obsahu řezu
- tětivový a tečnový čtyřúhelník

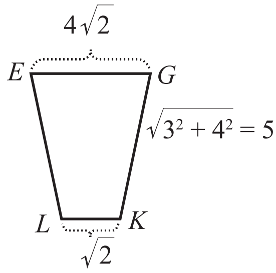
b) $v = \sqrt{25 - 4{,}5} = \sqrt{20{,}5}$

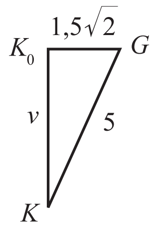
$\Downarrow$

obsah lichoběžníkového řezu je

$S = \dfrac{4\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{20{,}5} = \sqrt{256{,}25} \approx 16\ \mathrm{cm}^2$

Obsahy řezu a stěny krychle jsou přibližně stejné.





c) Lichoběžník *LKGE* je rovnoramenný, proto je možné mu opsat kružnici, **je tětivový**.
Tečnový není, nelze mu kružnici vepsat, protože součet protějších stran není stejný ($4\sqrt{2} + \sqrt{2} \neq 5 + 5$).

7.4 $A[1;\ 1;\ 0]$, $B[2;\ 0;\ -1]$, $C[0;\ -2;\ 3]$, $D[0;\ 0;\ 2]$

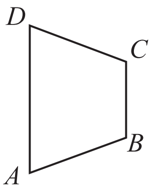
a) Pokud jsou A, B, C, D vrcholy čtyřúhelníku, pak body leží v téže rovině a žádné tři neleží v přímce.

Skutečnost ověříme tak, že
např. • určíme rovnici roviny $\varepsilon = \leftrightarrow ABC$ a zjistíme, zda platí $D \in \varepsilon$
nebo • zjistíme, nejsou-li $\leftrightarrow AB$ a $\leftrightarrow CD$ mimoběžky, a zda $\leftrightarrow AB \neq \leftrightarrow CD$
nebo • $\vec{w} = C - A$ vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u} = D - A$ a $\vec{v} = B - A$.
Jako ukázku volíme *poslední postup*:
$\vec{w} = C - A = (-1;\ -3;\ 3)$, $\vec{u} = D - A = (-1;\ -1;\ 2)$, $\vec{v} = B - A = (1;\ -1;\ -1)$.
Platí $\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$, kde $a, b \in \mathrm{R}$? Soustava rovnic

$$\left.\begin{aligned} -1 &= -a + b \\ -3 &= -a - b \\ \underline{3} &\underline{= 2a - b} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = 2,\ b = 1$$

Je dvojice $(a, b) = (2, 1)$ řešením i 3. rovnice? $3 = 2 \cdot 2 - 1$ .... platí.
Body *A*, *B*, *C*, *D* leží v téže rovině.

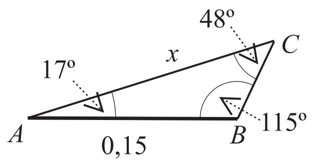
b) $B - A = (1;\ -1;\ -1)$, $C - B = (-2;\ -2;\ 4)$, $D - C = (0;\ 2;\ -1)$, $A - D = (1;\ 1;\ -2)$.
Protože $C - B = -2 \cdot (A - D)$, je $BC \parallel AD$.

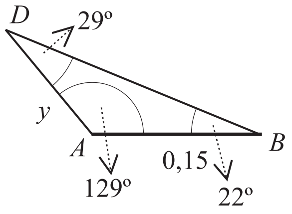


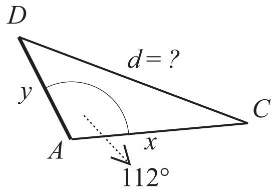
- Vektory $B - A$ a $D - C$ rovnoběžné nejsou, proto je čtyřúhelník $ABCD$ **lichoběžník**.
- $\left.\begin{aligned} |D - C| = \sqrt{5},\ |C - B| = \sqrt{24} \\ |B - A| = \sqrt{3},\ |A - D| = \sqrt{6} \end{aligned}\right\}$ žádné dvě jeho **strany nejsou shodné**.
- $(C - A) \cdot (B - D) = -1 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 + 3 \cdot (-3) = -11 \neq 0 \Rightarrow$ **úhlopříčky nejsou k sobě kolmé**.

- metody ověření, že čtyři body leží v téže rovině
- výběr metody a její aplikace
- rovnoběžné vektory
- velikost vektoru
- kolmost vektorů

7.5 $|\sphericalangle CAB| = 17^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 115^\circ$, $|\sphericalangle ABD| = 22^\circ$, $|\sphericalangle DAB| = 129^\circ$







$$\frac{x}{\sin 115^\circ} = \frac{0{,}15}{\sin 48^\circ} \approx 0{,}18 \qquad \frac{y}{\sin 22^\circ} = \frac{0{,}15}{\sin 29^\circ} \approx 0{,}12 \qquad d = \sqrt{0{,}18^2 + 0{,}12^2 - 2 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}18 \cdot \cos 112^\circ}$$

$d \approx 0{,}251$

Přímý úsek v plánu má délku přibližně čtvrt kilometru,
délka obchvatu by měla být **asi 1,78 · 0,251 ≈ 0,45 km.**
A to je **méně než 0,5 km.**

- plán dílčích kroků řešení
- výpočet velikostí dalších úhlů
- využití sinové a kosinové věty
- výpočet délky obchvatu