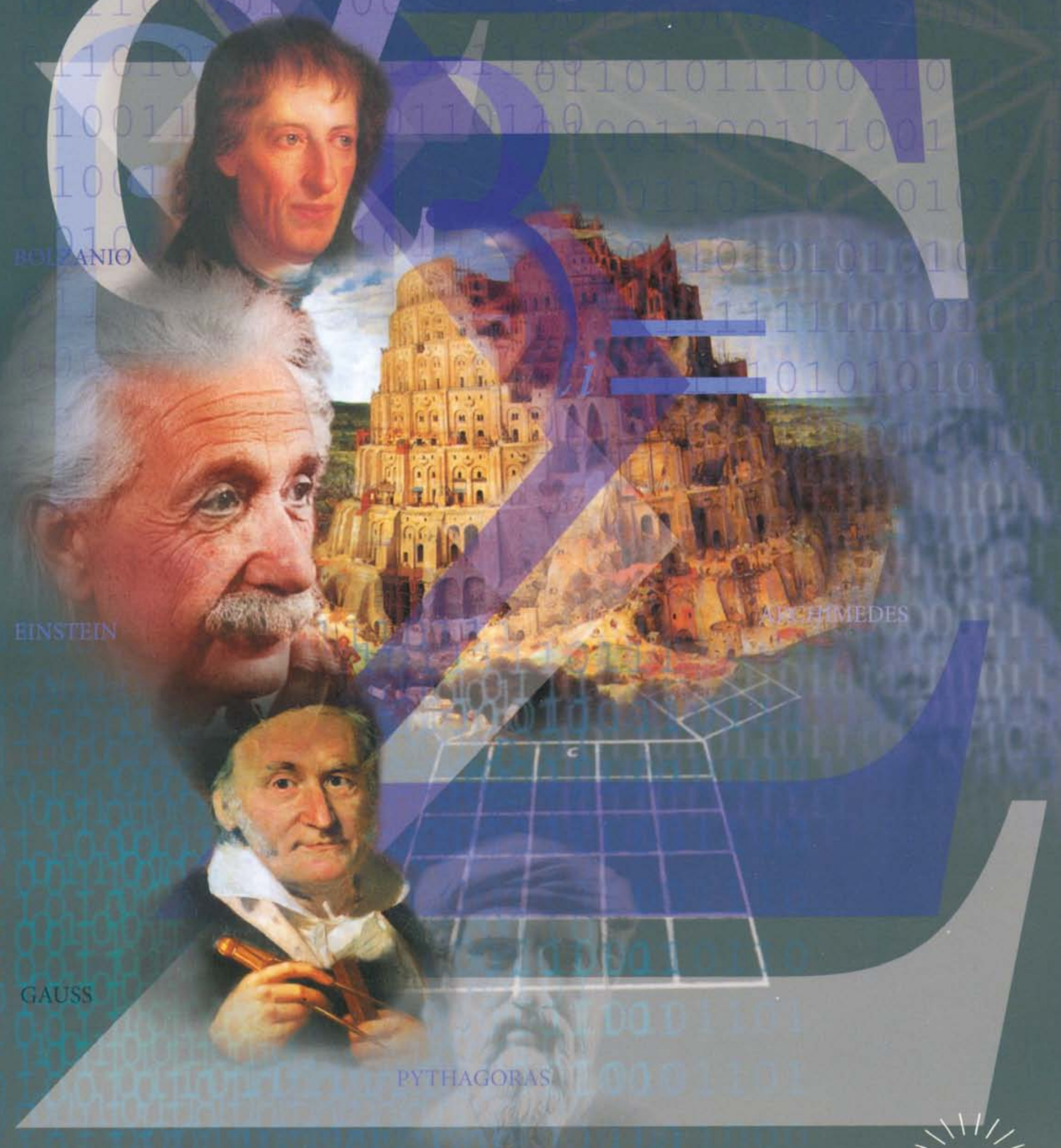
František Janeček

REPETITORIUM

středoškolské **algebry** v příkladech



Scientia

František Janeček

REPETITORIUM

středoškolské **algebry** v příkladech

Scientia
PRAHA 2007

Bližší informace a objednávky:
NAKLADATELSTVÍ SCIENTIA, spol. s r. o.,
Křížová 1018/6, 150 05 Praha 5
tel. 233 350 201 • fax 220 510 274
obchod@scientia.cz • www.scientia.cz

ISBN 978-80-86960-32-6

Obsah

Úvodní slovo

REPETITIO EST MATER STUDORUM (SCIENTIAE)
Středověká pedagogická moudrost

Milí studenti,

dostává se Vám do rukou publikace s názvem Repetitorium středoškolské algebry v příkladech. Knížka zahrnuje tradiční partie se souborem úloh, který by vám měl pomoci získat dovednosti v početní technice. Jejím cílem je, abyste uměli uvědoměle aplikovat teoretické poznatky v průběžném studiu matematiky na střední škole i při přípravě k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.

Sbírka je členěna podle tematických celků do 9. kapitol. Každá z nich je uspořádána následovně:
V 1. části je uveden přehled očekávaných výstupů – požadovaných znalostí a dovedností, které byste měli ovládat po prostudování příslušných teoretických poznatků a po propočítání příkladů uvedené kapitoly.

Ve 2. části jsou zařazeny systematicky uspořádané ilustrativní skupiny řešených příkladů, které mají ukázat, jak řešit úlohy po stránce obsahové i formální. Čtěte pozorně a řádně si sami všechny příklady přepočítejte. K samostatnému procvičení a tréninku tady najdete i další neřešené příklady (tzv. otevřené úlohy bez nabídnuté volby výsledku).

Ve 3. části jsou zařazeny tzv. uzavřené úlohy, které obsahují příklady s nabídnutou volbou několika výsledků, přičemž vždy právě jeden nabídnutý výsledek je řešením úlohy.

Příklady v každé kapitole jsou průběžně číslovány. U uzavřených i otevřených úloh jsou uvedeny na závěr jejich výsledky, které umožňují kontrolu správnosti řešení.

Obsahově je náplň příkladů čerpána z našich a zahraničních učebnic matematiky a sbírek příkladů pro střední i vysoké školy a ze zdrojů vlastních. Stručný přehled použité a doporučené literatury k dalšímu studiu je uveden na konci knihy.

Při studiu matematiky vám přejeme, aby vám tato sbírka úloh byla ve všech případech nápomocná. Bude to od vás vyžadovat mnoho trpělivosti a poctivého úsilí.

Autor a redakce nakladatelství

1 Základy matematické logiky a teorie množin

Očekávané výstupy

Student
- používá konstanty a proměnné k zápisu slovního textu
- pozná, zda daná věta či zápis je výrok nebo výroková forma
- určuje pravdivostní hodnoty jednoduchých (elementárních) výroků
- tvoří negace výroků
- užívá správně logické spojky (operátory)
- utváří složené výroky (konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence dvou výroků) a určuje jejich pravdivostní hodnotu
- vytvoří k dané implikaci implikaci obrácenou a obměněnou
- neguje složené výroky
- vyjadřuje pravdivostní ohodnocení výrokové formule pomocí pravdivostní tabulky
- zapisuje kvantifikované výroky pomocí obecného (velkého) nebo existenčního (malého) kvantifikátoru
- neguje výroky s kvantifikátory
- objasní stavbu matematické věty
- zapisuje a určuje množiny výčtem prvků, charakteristickou vlastností prvků a množinovými operacemi
- určuje vlastnosti množin: množina konečná, nekonečná, prázdná
- pozná vztah mezi množinami (podmnožina, rovnost množin), popíše všechny možné podmnožiny dané množiny
- ve výpočtech používá operace s množinami, určuje sjednocení, průnik a rozdíl množin, doplněk množiny, znázorňuje graficky užitím Vennových diagramů
- ověřuje množinové rovnosti
- využije charakteristických vlastností číselných množin N, Z, Q, R k určení vztahů mezi těmito množinami
- zapisuje a znázorňuje intervaly na číselné ose, operuje s nimi
- aplikuje geometrický význam absolutní hodnoty
- geometricky interpretuje pojmy: uspořádaná *n*-tice, kartézský součin a jeho graf a pracuje s nimi

1.1 Výroky, výrokové formy a operace s nimi

Příklad 1

Rozhodněme, která z následujících sdělení jsou výroky a která představují výrokové formy. U výroků zároveň určeme jejich pravdivostní hodnotu.

a) Číslo 3 není prvočíslo.

b) Číslo x je záporné.

c) Každý obdélník je rovnoběžník.

d) Přímka a je rovnoběžná s přímkou b.

e) Pro reálná čísla u, v platí $u - v = 6$.

f) Brno je hlavním městem České republiky.

g) $3 \cdot 4 = 13$

h) $5 - 8 = -3$

i) Součin dvou libovolných záporných čísel je kladné číslo.

j) Sněží?

k) Nula patří mezi nekladná čísla.

l) Začněte pracovat!

Řešení

Výroky jsou sdělení a), c), f), g), h), i), k):

a) výrok nepravdivý, c) pravdivý, f) nepravdivý, g) nepravdivý, h) pravdivý, i) pravdivý, k) pravdivý.

Sdělení b), d), e) jsou výrokové formy.

Sdělení j) a l) nejsou výrokem ani nepředstavují výrokovou formu. ◀

Příklad 2

Jsou dány výroky: $A\colon 3 < 5$

$B\colon \sqrt{16} = 4$

Rozhodněme o pravdivosti výroků:

a) $A \wedge \neg B$ b) $\neg A \vee \neg B$ c) $\neg A \Rightarrow \neg B$

d) $B \Rightarrow A$ e) $A \Leftrightarrow B$

Řešení

Výrok A je pravdivý, $p(A) = 1$, výrok B je nepravdivý, $p(B) = 0$.

Je pak $p(\neg A) = 0,\ p(\neg B) = 1$.

Pravdivostní hodnota zadaných výroků je tedy podle pravdivostní tabulky složených výroků tato:

a) $p(A \wedge \neg B) = 1$ ◀ b) $p(\neg A \vee \neg B) = 1$ ◀ c) $p(\neg A \Rightarrow \neg B) = 1$ ◀

d) $p(B \Rightarrow A) = 1$ ◀ e) $p(A \Leftrightarrow B) = 0$ ◀

Příklad 3

Přepišme jako konjunkci nebo disjunkci dvou výroků tyto matematické zápisy:

a) $3 < \pi < 8$ b) $12 \leq 7$

c) $11 \cdot 50 = 55 \cdot 10 = 550$ d) $\sqrt{20} \neq 4$

Řešení

a) $(3 < \pi) \wedge (\pi < 8)$ ◀ b) $(12 < 7) \vee (12 = 7)$ ◀

c) $(11 \cdot 50 = 550) \wedge (55 \cdot 10 = 550)$ ◀ d) $(\sqrt{20} < 4) \vee (\sqrt{20} > 4)$ ◀

Příklad 4

Ověřme platnost výrokové formule $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$.

Řešení

Sestavíme pravdivostní tabulku, do jejichž sloupců zapíšeme možné pravdivostní hodnoty výrokových proměnných A, B, odpovídající hodnoty výrokových formulí $\neg B$, $A \Rightarrow B$, $\neg(A \Rightarrow B)$, $A \wedge \neg B$ a nakonec pravdivostní hodnoty výsledné formule $\mathscr{A}$. Dostaneme:

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg B)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p[\neg(A \Rightarrow B)]$	$p(A \wedge \neg B)$	$\mathrm{p}(\mathscr{A})$
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1

Z hodnot v posledním sloupci tabulky je patrné, že pravdivostní hodnota dané výrokové formule je rovna 1 pro všechny možné pravdivostní hodnoty proměnných A, B.

Závěr:

Daná výroková formule je tautologie. ◀

Příklad 5

Vytvořme negace těchto jednoduchých výroků (bez uvození „Není pravda, že“):

a) Matematika patří k přírodovědným předmětům.

b) Venku sněží.

c) $5 \geq 3$

d) Trojúhelník KLM je tupoúhlý.

Řešení

a) Matematika nepatří k přírodovědným předmětům. ◄

b) Venku nesněží. ◄

c) $5 < 3$ ◄

d) Trojúhelník KLM je pravoúhlý nebo ostroúhlý. ◄

Příklad 6

Utvořme negace následujících výroků:

a) Aspoň jeden student byl výborně připraven.

b) Číslo 28 má nejvýše 5 dělitelů.

c) Tato úloha má právě dvě řešení.

d) Pro každé celé číslo x platí $x > 0$.

e) Existuje takové reálné číslo a, že je $(a+1)^2 = a$.

f) Všichni žijící lidé jsou nižší než 280 cm.

g) $\forall x \in \mathsf{M} : x \in \mathsf{Q}$

h) $\exists x \in \mathsf{R} : x > 1$

Řešení

a) Žádný student nebyl výborně připraven. ◄

b) Číslo 28 má aspoň 6 dělitelů. ◄

c) Tato úloha má nejvýše jedno nebo aspoň tři řešení. ◄

d) Existuje aspoň jedno celé číslo x, pro které platí $x \leq 0$. ◄

e) Pro každé reálné číslo a je $(a+1)^2 \neq a$. ◄

f) Existuje žijící člověk, který měří 280 cm nebo více. ◄

g) $\exists x \in \mathsf{M} : x \notin \mathsf{Q}$ ◄

h) $\forall x \in \mathsf{R} : x \leq 1$ ◄

Cvičení

1 Rozhodněte o pravdivosti výroků:

a) Jestliže zvětšíme každou hranu krychle o 10 %, pak se zvětší o 10 % i její povrch.

b) Jestliže zvětšíme každou hranu krychle o 10 %, pak se zvětší o 10 % i její objem.

2 K daným výrokům

A: Číslo 9 je dělitelné dvěma.
B: Číslo 9 je dělitelné třemi.

vytvořte složené výroky $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ a určete jejich pravdivostní hodnotu.

3 Pomocí pravdivostní tabulky ověřte, že pro libovolné dva výroky A, B platí:

a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

4 Negujte následující obecné, resp. existenční výroky, a posuďte jejich pravdivost:

a) Pro každé reálné číslo x platí $\frac{x}{x} = 1$.

b) Existuje reálné číslo x, pro které je $\sqrt{x} \leq 0$.

c) Pro všechna reálná x je $x > \frac{1}{x}$.

d) Existuje reálné číslo x takové, že je $\frac{1}{x} > 10$.

5 Pomocí proměnné a kvantifikátoru zapište:

a) Druhá mocnina každého reálného čísla je číslo nezáporné.

b) Existuje přirozené číslo, které je kořenem rovnice $x^2 - 9 = 0$.

6 Vyjádřete slovy:

a) $\exists x \in \mathsf{R} : \sqrt{x^2} = x$ b) $\forall x \in \mathsf{R} : (x+1)^2 < 1$

7 Vyslovte negace vět z příkladu 6.

1.2 Základní množinové pojmy, intervaly

Příklad 7

Popišme všechny možné podmnožiny množiny $\mathsf{M} = \{3, -4, 5\}$.

Řešení

1) Prázdná množina: $\emptyset$.
2) Množiny obsahující právě jeden prvek: $\{3\}$, $\{-4\}$, $\{5\}$.
3) Množiny obsahující právě dva prvky: $\{3, -4\}$, $\{3, 5\}$, $\{-4, 5\}$.
4) Množina obsahující všechny prvky množiny M, tj. celá množina M.

Závěr:
Množina M obsahuje $2^3 = 8$ podmnožin (včetně prázdné množiny a dané množiny). ◀

Příklad 8

Popišme průnik $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$, jestliže A je množina všech přirozených čísel menších než 10 a B je množina všech prvočísel.

Řešení

Je $\mathsf{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Podle definice průniku obsahuje množina $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ právě ty prvky množiny A, která jsou zároveň prvočísla.
Tuto vlastnost mají pouze prvky 2, 3, 5 a 7 (číslo 1 se nepovažuje za prvočíslo).

Závěr:
$\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \{2, 3, 5, 7\}$ ◀

Příklad 9

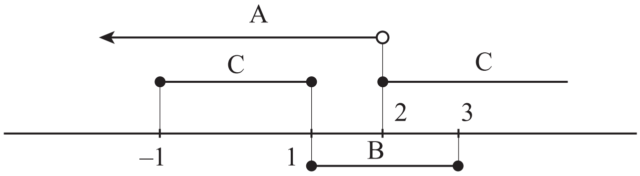
Jsou dány intervaly $\mathsf{A} = (-\infty, 2)$, $\mathsf{B} = \langle 1, 3 \rangle$ a množina $\mathsf{C} = \langle -1, 1 \rangle \cup \langle 2, \infty)$.
Určete:

a) $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap \mathsf{C}$ b) $(\mathsf{C} \cup \mathsf{B}) \cap \mathsf{A}$

c) $\mathsf{C} \cup \mathsf{B} \cap \mathsf{A}$ d) $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} \cup \mathsf{C}$

Řešení

Zadané množiny zakreslíme na číselné ose:



Užitím definice operací průniku, resp. sjednocení, dostaneme tyto výsledky:

a) $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap \mathsf{C} = \langle -1, 1 \rangle \cup \langle 2, 3 \rangle$ ◄ b) $(\mathsf{C} \cup \mathsf{B}) \cap \mathsf{A} = \langle -1, 2)$ ◄

c) $\mathsf{C} \cup \mathsf{B} \cap \mathsf{A} = \{1\}$ ◄ d) $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} \cup \mathsf{C} = (-\infty, \infty)$ ◄

Příklad 10

Vypišme prvky množin A, B, A ∪ B, A ∩ B, kde

$$\mathsf{A} = \{x \in \mathsf{R};\ |x-2| \le 4\},\ \ \mathsf{B} = \left\{x \in \mathsf{R};\ \left|6 + \frac{x}{2}\right| > 7\right\}.$$

Řešení

Množina A: $|x-2| \le 4 \Rightarrow x \in \langle -2, 6 \rangle$ ◄

Množina B: $\left|6 + \frac{x}{2}\right| > 7 \Rightarrow \frac{1}{2}|12 + x| > 7 \Rightarrow |12 + x| > 14 \Rightarrow x \in (-\infty, -26) \cup (2, \infty)$ ◄

$$\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \langle -2, 6 \rangle \cup [(-\infty, -26) \cup (2, \infty)] = (-\infty, -26) \cup \langle -2, \infty)$$ ◄

$$\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \langle -2, 6 \rangle \cap [(-\infty, -26) \cap (2, \infty)] = (2, 6\rangle$$ ◄

Příklad 11

Určeme kartézské součiny A × B, B × A, kde A = {1, 2} a B = {3, 4, 5}.

Řešení

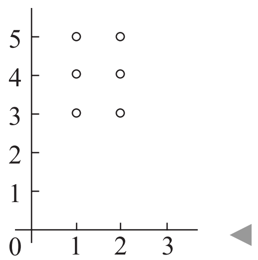
Podle definice kartézského součinu množin platí:

$$\mathsf{A} \times \mathsf{B} = \{[1, 3], [1, 4], [1, 5], [2, 3], [2, 4], [2, 5]\}$$

$$\mathsf{B} \times \mathsf{A} = \{[3, 1], [3, 2], [4, 1], [4, 2], [5, 1], [5, 2]\}$$

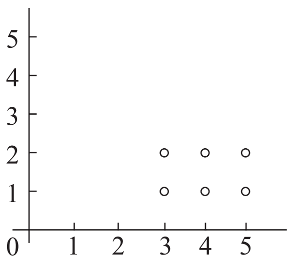
Výsledky lze znázornit pomocí pravoúhlé soustavy souřadnic jako množiny právě těch bodů roviny, jejichž první souřadnice patří do množiny A (resp. B) a druhé souřadnice patří do množiny B (resp. A); množina A × B, resp. B × A, je znázorněna na obr. a), resp. na obr. b).

a)



◄

b)



◄

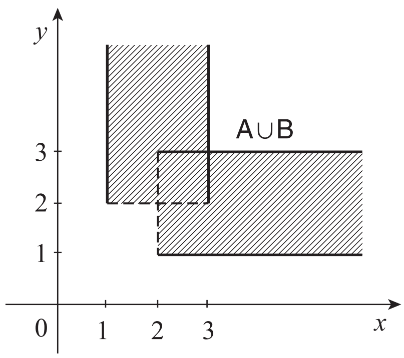
Příklad 12

Jsou dány množiny $\mathsf{A} = \{[x, y] \in \mathsf{R}^2;\ 1 \le x \le 3 \wedge y > 2\},\ \mathsf{B} = \{[x, y] \in \mathsf{R}^2;\ x > 2 \wedge 1 \le y \le 3\}$. Graficky znázorněme množiny A ∪ B, A ∩ B a A – B.

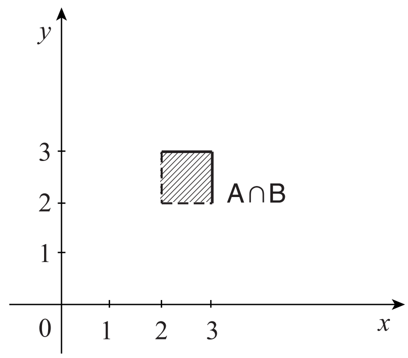
Řešení

Výsledky najdeme obdobně jako v příkladě 11, jsou znázorněny na obr. a) – c).

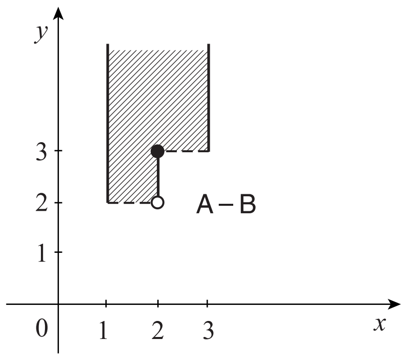
a)



b)



c)



Cvičení

8 Jsou dány množiny: $\mathsf{A} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$, $\mathsf{B} = \{4, 8, 12, 16\}$, $\mathsf{C} = \{1, 5, 8, 9, 13, 17\}$. Užitím symbolů A, B, C, ∪, ∩ doplňte pravé strany rovností:

$\{1, 2, 4, 8, 12, 16, 32\} = ...$

$\{4, 8, 16\} = ...$

$\{1, 2, 4, 5, 8, 9, 13, 16, 17, 32\} = ...$

$\{1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17\} = ...$

$\{8\} = ...$

9 Jsou dány množiny:
množina M všech přirozených čísel menších než 16,
M_1 její podmnožina, která obsahuje všechna sudá čísla,
M_2 její podmnožina, která obsahuje všechna čísla dělitelná třemi,
M_3 její podmnožina, která obsahuje všechna čísla dělitelná pěti.
Najděte množiny:

a) $\mathsf{M}_1 \cup \mathsf{M}_2$
b) $\mathsf{M}_1 \cup \mathsf{M}_2 \cup \mathsf{M}_3$
c) $\mathsf{M}_2 \cap \mathsf{M}_3$
d) $\mathsf{M}_1 \cap \mathsf{M}_2 \cap \mathsf{M}_3$
e) $(\mathsf{M}_1 \cup \mathsf{M}_2) \cap \mathsf{M}_3$
f) $(\mathsf{M}_1 \cap \mathsf{M}_3) \cup (\mathsf{M}_2 \cap \mathsf{M}_3)$
g) $\mathsf{M}_2 - \mathsf{M}_1$
h) $\mathsf{M}_1 - \mathsf{M}_2$

10 Jsou dány intervaly $\mathsf{A} = \langle -7, 2\rangle$, $\mathsf{B} = \langle -2, 5)$, $\mathsf{C} = \langle 2, \infty)$. Určete:

a) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$
b) $\mathsf{A} \cap \mathsf{C}$
c) $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$
d) $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cup \mathsf{C}$
e) $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap \mathsf{C}$
f) $\mathsf{A} - \mathsf{B}$

11 Určete množiny $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ a $\mathsf{A} - \mathsf{B}$, je-li dáno:

a) $\mathsf{A} = \langle -2, 1\rangle$, $\mathsf{B} = \langle 0, 2\rangle$
b) $\mathsf{A} = (0, 8)$, $\mathsf{B} = (-\infty, -10\rangle \cup \langle 2, \infty)$

12 Jsou dány intervaly $\mathsf{A} = (-\infty, 2),\ \mathsf{B} = \langle 1, 4\rangle,\ \mathsf{C} = \langle 3, \infty)$.
Určete množiny:

a) $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap \mathsf{C}$ b) $(\mathsf{A} \cup \mathsf{C}) \cap \mathsf{B}$ c) $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cup \mathsf{C}$
d) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}$ e) $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} \cup \mathsf{C}$

13 Určete $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$ a $\mathsf{B} \times \mathsf{A}$, kde $\mathsf{A} = \{1, 2, 3\},\ \mathsf{B} = \{1, 4\}$.

14 Jsou dány množiny $\mathsf{A} = \{1, 2, 3\},\ \mathsf{B} = \{2, 3\},\ \mathsf{C} = \{x \in \mathsf{R};\ 1 \le x \le 4\}$,
$\mathsf{D} = \{x \in \mathsf{R};\ x \in \langle 5, 7\rangle\},\ \mathsf{E} = \{x \in \mathsf{R};\ 1 \le x \le 3\}$.
Sestrojte grafy kartézských součinů:

a) $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$ b) $\mathsf{B} \times \mathsf{A}$ c) $(\mathsf{C} \cup \mathsf{D}) \times \mathsf{E}$

15 Jsou dány množiny: $\mathsf{A} = \{[x, y] \in \mathsf{R}^2;\ x \ge 3 \wedge 1 \le y \le 4\}$,
$\mathsf{B} = \{[x, y] \in \mathsf{R}^2;\ 1 \le x \le 5 \wedge y \ge 3\}$.
Graficky znázorněte množiny $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ a $\mathsf{A} - \mathsf{B}$.

Souhrnné úlohy s volbou výsledku

1 Rozhodněte, která z uvedených vět není výrokem:

A Číslo x má právě tři dělitele.
B Každá kvadratická rovnice má v oboru reálných čísel právě tři různé kořeny.
C Jestliže m je liché celé číslo, potom $m + 1$ je sudé celé číslo.
D Jestliže trojúhelník KLM je ostroúhlý, potom pro délky jeho stran platí trojúhelníková nerovnost.
E $2! + 3! = 5!$

2 Negací výroku „Každé prvočíslo má sudý počet dělitelů.“ je výrok

A Každé prvočíslo má lichý počet dělitelů.
B Každé složené číslo má lichý počet dělitelů.
C Žádné prvočíslo nemá sudý počet dělitelů.
D Existuje prvočíslo, které má lichý počet dělitelů.
E žádná z uvedených odpovědí není správná

3 Negací výroku „Existuje pravoúhelník, který má nejvýše jednu osu souměrnosti.“ je výrok

A Každý pravoúhelník má aspoň dvě osy souměrnosti.
B Žádný pravoúhelník nemá víc než jednu osu souměrnosti.
C Každý pravoúhelník má nejvýše jednu osu souměrnosti.
D Existuje pravoúhelník, který má právě jednu osu souměrnosti.
E žádná z uvedených odpovědí není správná

4 Rozhodněte, který z následujících výroků je pravdivý:

A $\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{5}} \ge \left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ B $\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{5}} < \left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ C $\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{5}} > \left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ D $\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{5}} \le \left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$

E žádná z uvedených odpovědí není správná

5 Podmnožinou množiny $\left\langle -\frac{3}{2}\pi,\ \pi \right\rangle$ není množina

A $\langle -2,\ 3\rangle$ B $\left\langle -\frac{7\pi}{4},\ 0 \right\rangle$ C $\left\langle -\frac{3}{2},\ 1 \right\rangle$ D $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

E žádná z uvedených odpovědí není správná

6 Počet všech podmnožin množiny $\{-\pi,\ 3,\ 7\}$ je roven

A 5 B 6 C 8 D 7 E žádná z uvedených odpovědí není správná

7 Jsou dány množiny $\mathsf{A} = (-\infty,\ -8)$, $\mathsf{B} = \langle -1,\ \infty)$, $\mathsf{C} = (-\infty,\ -4)$, $\mathsf{D} = (-2,\ \infty)$.
Pro množinu $\mathsf{M} = \mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap (\mathsf{C} \cup \mathsf{D})$ platí:

A $\mathsf{M} = (-\infty,\ -8\rangle \cup (-2,\ \infty)$ B $\mathsf{M} = \emptyset$ C $\mathsf{M} = \mathsf{R}$ D $\mathsf{M} = (-\infty,\ -4) \cup (-2, \infty)$

E žádná z uvedených odpovědí není správná

8 Rozhodněte, která z následujících množin je interval:

A Z B $\{-3\}$ C $\{x \in \mathsf{R};\ -2 < x \leq 8\}$ D $\{x \in \mathsf{Q};\ x \geq 0\}$

E žádná z uvedených odpovědí není správná

9 Množinu $\mathsf{M} = \{x \in \mathsf{R};\ |x+3| < 1 \wedge x \geq -3\}$ zapište jako interval:

A $\langle -3,\ -2\rangle$ B $\langle -3,\ -2)$ C $(-4,\ -2)$ D $\langle -3,\ 2)$

E žádná z uvedených odpovědí není správná

10 Jsou dány množiny $\mathsf{A} = \{x \in \mathsf{R};\ |x+2| > 3\}$, $\mathsf{B} = \{x \in \mathsf{R};\ |x-1| \leq 7\}$.
Pro množinu $\mathsf{C} = \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ platí:

A $\mathsf{C} = \langle -6,\ -5) \cup (1,\ 8\rangle$ B $\mathsf{C} = (1,\ 8\rangle$ C $\mathsf{C} = \langle -6,\ +\infty)$ D $\mathsf{C} = \langle -6,\ 8\rangle$

E žádná z uvedených odpovědí není správná

Výsledky

Cvičení

1 a) nepravdivý výrok • b) nepravdivý výrok. Jestliže zvětšíme každou hranu krychle o 10 %, zvětší se její povrch o 21 %, objem o 33,1 %.

2 $\neg A$: Číslo 9 není dělitelné dvěma … pravdivý výrok
$A \wedge B$: Číslo 9 je dělitelné dvěma a třemi … nepravdivý výrok
$A \vee B$: Číslo 9 je dělitelné dvěma nebo třemi … pravdivý výrok
$A \Rightarrow B$: Jestliže je číslo 9 dělitelné dvěma, pak je dělitelné třemi … pravdivý výrok
$A \Leftrightarrow B$: Číslo 9 je dělitelné dvěma, právě když je dělitelné třemi … nepravdivý výrok

3 výrokové formule a) i b) jsou tautologie

4 a) nepravdivý výrok; jeho negace: Existuje reálné číslo x, pro které není výraz $\frac{x}{x}$ roven jedné. • b) pravdivý výrok; jeho negace: Pro každé reálné číslo x je $\sqrt{x} > 0$. • c) nepravdivý výrok; jeho negace: Existuje reálné číslo x, pro něž je $x \leq \frac{1}{x}$. • d) pravdivý výrok; jeho negace: Pro každé $x \in \mathsf{R}$ je $\frac{1}{x} \leq 10$.

5 a) $\sqrt{x} \in \mathsf{R} : x^2 \geq 0$ • b) $\exists x \in \mathsf{N} : x^2 - 9 = 0$

6 a) Existuje reálné číslo x, pro které platí $\sqrt{x^2} = |x|$. • b) Pro každé reálné číslo x platí, že $(x+1)^2 < 1$.

7 a) Pro každé reálné číslo x platí, že $\sqrt{x^2} \neq x$. • b) Existuje reálné číslo x, pro které platí $(x+1)^2 \geq 1$.

8 $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$, $\mathsf{A} \cup \mathsf{C}$, $\mathsf{B} \cup \mathsf{C}$, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}$

9 a) $M_1 \cup M_2 = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$ • b) $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$ • c) $M_2 \cap M_3 = \{15\}$ • d) $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \emptyset$ • e) $(M_1 \cup M_2) \cap M_3 = \{10, 15\}$ • f) $(M_1 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_3) = \{10, 15\}$ • g) $M_2 - M_1 = \{3, 9, 15\}$ • h) $M_1 - M_2 = \{2, 4, 8, 10, 14\}$

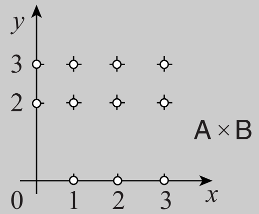
10 a) $\langle -2, 2\rangle$ • b) $\{2\}$ • c) $\langle -7, 5)$ • d) $\langle -2, \infty)$ • e) $\langle 2, 5)$ • f) $\langle -7, -2)$

11 a) $A \cap B = \langle 0, 1\rangle$, $A \cup B = \langle -2, 2\rangle$, $A - B = \langle -2, 0)$ • b) $A \cap B = \langle 2, 8)$, $A \cup B = \langle -\infty, -10\rangle \cup (0, \infty)$, $A - B = (0, 2)$

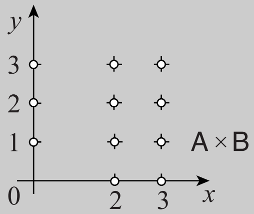
12 a) $\langle 3, 4\rangle$ • b) $\langle 1, 2) \cup \langle 3, 4\rangle$ • c) $\langle 1, 2) \cup \langle 3, \infty)$ • d) $\emptyset$ – intervaly A, B, C nemají žádné společné body • e) $(-\infty, \infty)$

13 $A \times B = \{[1, 1], [1, 4], [2, 1], [2, 4], [3, 1], [3, 4]\}$; $B \times A = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [4, 1], [4, 2], [4, 3]\}$

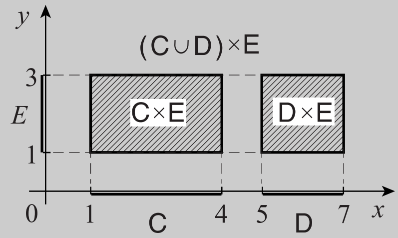
14 a)



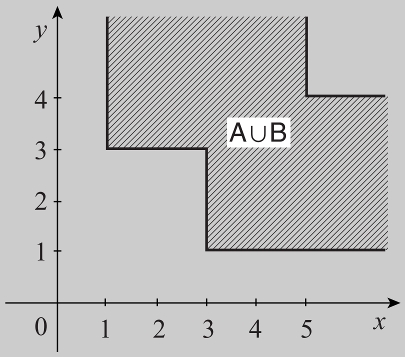
b)

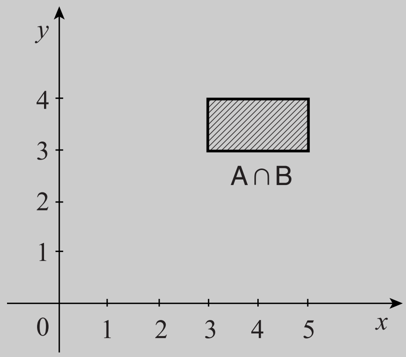


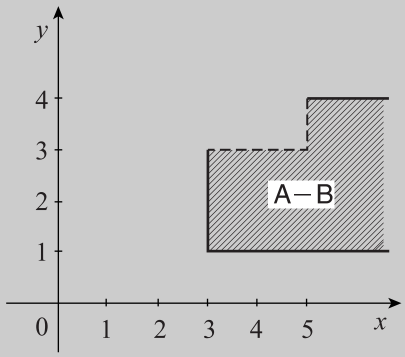
c)



15







Úlohy s volbou výsledku

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	A	B	B	C	B	C	B	A

2 Algebraické výrazy a jejich úpravy

Očekávané výstupy

Student
- smysluplně používá pojmy: jednočlen, mnohočlen (polynom), člen, koeficient a stupeň mnohočlenu, uspořádání mnohočlenu, hodnota mnohočlenu, nulový bod (kořen) mnohočlenu
- provádí početní operace s mnohočleny včetně dělení mnohočlenu mnohočlenem
- zná zpaměti a vhodně používá vzorce pro výpočet druhé a třetí mocniny dvojčlenu: $(a \pm b)^2,\ (a \pm b)^3$
- rozkládá mnohočleny na součin vytýkáním, postupným vytýkáním a pomocí algebraických vzorců $a^2 - b^2,\ a^3 + b^3,\ a^3 - b^3$
- rozkládá kvadratické trojčleny na součin lineárních dvojčlenů užitím vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratického trojčlenu
- doplní kvadratický trojčlen na čtverec
- v počítání s algebraickými zlomky:
  rozhoduje, kdy má daný zlomek smysl, ve výpočtech používá rozšiřování a krácení zlomků, sčítání, odčítání, násobení a dělení zlomků, zjednodušení složeného zlomku
- definuje mocninu s přirozeným exponentem, mocnitelem nula, s celočíselným záporným exponentem a s racionálním exponentem, n-tou odmocninu nezáporného čísla, ve výpočtech využívá efektivně pravidel pro počítání s mocninami s racionálními exponenty a pravidel pro odmocniny
- provádí operace s výrazy obsahujícími mocniny a odmocniny, částečné odmocnění, usměrňování zlomku
- určí absolutní hodnotu reálného čísla a popíše její vlastnosti
- upravuje výrazy s absolutní hodnotou, využívá geometrické interpretace absolutní hodnoty při řešení rovnic a nerovnic, které se dají ekvivalentními úpravami převést na tvar $|ax + b|\,\mathrm{N}\,c$ (a, b, c jsou daná čísla, $a \neq 0$, N představuje některý ze znaků $=, <, >, \leq, \geq$)
- definuje a vysvětlí pojmy: faktoriál, kombinační číslo, Pascalův trojúhelník včetně příslušné terminologie a symboliky; aktivně využívá vlastností faktoriálu a kombinačních čísel k úpravám výrazů s faktoriály a kombinačními čísly
- vhodně aplikuje znalost binomické věty na řešení kombinatorických úloh

2.1 Mnohočleny a operace s nimi, rozklady mnohočlenů, doplnění kvadratického trojčlenu na čtverec

Příklad 1

Proveďme dělení a určeme podmínky, za nichž má smysl:

$$(3x^3 + 14x^2 + x - 5) : (-1 + 3x)$$

Řešení

Nejprve oba mnohočleny uspořádáme sestupně podle exponentů proměnné x. První člen dělence pak vydělíme prvním členem dělitele. Získaným jednočlenem pak zpět vynásobíme všechny členy dělitele a vzniklý mnohočlen odečteme od dělence.
Stejným způsobem pak vypočteme zbývající členy podílu. Postup zapisujeme takto:

$$\begin{array}{l} (3x^3 + 14x^2 + x - 5) : (3x - 1) = x^2 + 5x + 2 \qquad \text{podmínka: } x \neq \frac{1}{3} \\ \underline{-(3x^3 - x^2)} \\ \quad 0 + 15x^2 + x \\ \quad \underline{-(15x^2 - 5x)} \\ \qquad 0 + 6x - 5 \\ \qquad \underline{-(6x - 2)} \\ \qquad\quad 0 - 3 \end{array}$$

Závěr:

$$\frac{3x^3 + 14x^2 + x - 5}{3x - 1} = x^2 + 5x + 2 - \frac{3}{3x-1}, \; x \neq \frac{1}{3}$$ ◀

Příklad 2

Rozložme na součin polynomy:

a) $ax - ay + bx - by$ b) $xz - yz - x^2 + 2xy - y^2$

c) $3r^2(r-s)^3 + 6r^3(r-s)^2$ d) $x^3 + 1$

e) $8a^3 - 27b^3$

Řešení

a) $ax - ay + bx - by = ax + bx - ay - by = (a+b)x - (a+b)y = (a+b)(x-y)$ ◀

b) $xz - yz - x^2 + 2xy - y^2 = (x-y)z - (x-y)^2 = (x-y)(y-x+z)$ ◀

c) $3r^2(r-s)^3 + 6r^3(r-s)^2 = 3r^2(r-s)^2[(r-s)+2r] = 3r^2(r-s)^2(3r-s)$ ◀

d) $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ ◀

e) $8a^3 - 27b^3 = (2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2)$ ◀

Příklad 3

Rozložme v součin kvadratické trojčleny:

a) $x^2 + 8x + 15$ b) $3x^2 - 7x + 2$

c) $9x^2 - 30x + 25$ d) $x^2 + 4x + 6$

Řešení

Nejprve vypočteme diskriminant $D = b^2 - 4ac$ kvadratického trojčlenu $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

a) $D = 4 > 0$. Hledáme čísla x_1, x_2, tak, aby $x_1 + x_2 = -8 \wedge x_1x_2 = 15$. Jednoduchou úvahou zjistíme, že tyto vztahy splňují čísla –5 a –3, takže kvadratický trojčlen můžeme rozložit v součin kořenových činitelů takto:

$$x^2 + 8x + 15 = (x+5)(x+3)$$ ◀

b) $D = 25 > 0$. Kvadratický trojčlen není v normovaném tvaru. Proto jej převedeme na součin $3(x - x_1)(x - x_2)$, kde x_1, x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice $3x^2 - 7x + 2 = 0$. Příslušné kořeny jsou $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

Dostáváme tedy výsledek: $3x^2 - 7x + 2 = 3(x-2)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (3x-1)(x-2)$ ◀

c) $D = 0$, proto $9x^2 - 30x + 25 = 9\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 = (3x-5)^2$, kde $x_{1,2} = \frac{5}{3}$ je dvojnásobný kořen příslušné kvadratické rovnice. ◀

d) $D = -8 < 0$, proto trojčlen $x^2 + 4x + 6$ nelze v oboru reálných čísel rozložit v součin. ◀

Příklad 4 Doplňme na čtverec kvadratické trojčleny: a) $x^2 + 6x + 14$
b) $3x^2 - x + 1$

Řešení

a) Kvadratický trojčlen je v normovaném tvaru, doplňujeme takto:
$$x^2 + 6x + 14 = (x^2 + 6x + 9) + 14 - 9 = (x+3)^2 + 5 \blacktriangleleft$$

b) Kvadratický trojčlen je nutno nejprve normovat vytknutím čísla 3 a pak teprve doplňovat na čtverec:
$$3x^2 - x + 1 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + \frac{1}{3}\right) =$$
$$= 3\left[\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}\right] = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12} \blacktriangleleft$$

Cvičení

1 Určete:

a) $(5a^3 - 3ab^2 + 2a^2b) + (-2b^3 + 2ab^2 - 5a^2b + a^3) - (2a^3 - 5a^2b + 3ab^2 - 5b^3)$
b) $(-2x^3y + 5x^2y^2 - 8x^4)(2x^2y - 3xy^2)$
c) $(3a^2 - a)^2$
d) $\left(\frac{2}{3}a - b\right)\left(\frac{2}{3}a + b\right)$
e) $(2a + b + c)^2$
f) $(a^2 - 1)^3$
g) $(2x^2y - 1)^3 - \left(x^2y + \frac{1}{2}\right)^2$

2 Vydělte polynomy a uveďte podmínky, za nichž má dělení smysl:

a) $(3x^3 + 5x^2 - x + 2) : (x + 2)$
b) $(x^3 + y^3) : (x^2 - xy + y^2)$
c) $(x^5 + 1) : (x + 1)$
d) $(5x + x^3 - 5x^2 - 2) : (-4 + x)$
e) $(4a^2 - a^3 - 8a + 2a^4 + 4) : (2a - 1)$
f) $x^4 : (x^2 - 1)$

3 Rozložte na součin polynomy:

a) $x^2 + xy - 5x - 5y$
b) $2x^5 - x^4 + y^4 - 2xy^4$
c) $a^4 - 2a^3 + 8a - 16$
d) $(x^2 + 1)^2 - 4x^2$
e) $(2a - 3b)^2 - (3b - 2a)^3$
f) $z^4 - 25$
g) $9(x + 1)^2 - 4(x - 3)^2$
h) $100x^4 - 64y^2$

4 Rozložte kvadratické trojčleny:

a) $x^2 + 7x + 12$
b) $x^2 - 5x + 6$
c) $6x^2 - x - 1$
d) $-a^2 - 3a + 4$
e) $6y^2 + 13y - 8$
f) $4k^2 - 20k + 25$

5 Užitím rozkladu kvadratického trojčlenu převeďte na součin:

a) $x^3 - x^2 - 42x$
b) $x^5 - x^4 - 56x^3$
c) $x^4 + 2x^2 - 3$
d) $x^4 - 13x^2 + 40$

6 Dané kvadratické trojčleny doplňte na čtverec:

a) $x^2 - x + 2$ b) $2x^2 - 4x + 3$

c) $3 + 2x - x^2$ d) $2 + 3x - 2x^2$

7 Dané kvadratické trojčleny doplňte na čtverec a pomocí této úpravy proveďte jejich rozklad (pokud je to možné):

a) $x^2 + 16x - 336$ b) $8x^2 - 2x - 3$ c) $5x^2 + 3x + 2$

2.2 Algebraické zlomky

Příklad 5

Proveďme:

$$\frac{3a}{a^3-8} : \frac{a^2-4}{4(a^2+2a+4}$$

Řešení

$$\frac{3a}{a^3-8} : \frac{a^2-4}{4(a^2+2a+4} = \frac{3a}{(a-2)(a^2+2a+4)} \cdot \frac{4(a^2+2a+4)}{(a-2)(a+2)} = \frac{12a}{(a-2)^2(a+2)}$$

$$a \neq \pm 2$$ ◄

Příklad 6

Upravme výraz:

$$\frac{a^2+a-2}{a^{n+1}-3a^n} \cdot \left[\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4} - \frac{3}{a^2-a}\right],\ n \in \mathrm{N}$$

Řešení

$$\frac{a^2+a-2}{a^{n+1}-3a^n} \cdot \left[\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4} - \frac{3}{a^2-a}\right] = \frac{a^2+a-2}{a^n(a-3)} \cdot \left[\frac{4(a+1)}{4(a-1)(a+1)} - \frac{3}{a(a-1)}\right] =$$

$$= \frac{(a-1(a+2))}{a^n(a-3)} \cdot \left[\frac{1}{a-1} - \frac{3}{a(a-1)}\right] = \frac{(a-1)(a+2)}{a^n(a-3)} \cdot \frac{a-3}{a(a-1)} = \frac{a+2}{a^{n+1}}$$

$$a \neq 0,\ a \neq \pm 1,\ a \neq 3$$ ◄

Příklad 7

Zjednodušme výraz:

$$\frac{\frac{x^3}{y^2} + \frac{x^2}{y} + x + y}{\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}}$$

Řešení

$$\frac{\frac{x^3}{y^2} + \frac{x^2}{y} + x + y}{\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}} = \frac{\frac{x^3+x^2y+xy^2+y^3}{y^2}}{\frac{x^4-y^4}{x^2y^2}} = \frac{\frac{x^2(x+y)+y^2(s+y)}{y^2}}{\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2y^2}} =$$

$$= \frac{\frac{(x+y)(x^2+y^2)}{y^2}}{\frac{(x+y)(x-y)(x^2+y^2)}{x^2y^2}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{x-y}{x^2}} = \frac{x^2}{x-y},\ x \neq 0,\ y \neq 0,\ x \neq \pm y$$ ◄

Cvičení Zjednodušte výrazy a určete podmínky, za kterých mají provedené úpravy smysl:

8 $\left(a-\dfrac{4ab}{a+b}+b\right):\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{b-a}-\dfrac{2ab}{a^2-b^2}\right)$

9 $\dfrac{x}{ax-2a^2}-\dfrac{2}{x^2+x-2ax-2a}\cdot\left(1+\dfrac{3x+x^2}{3+x}\right)$

10 $\dfrac{2a}{a^2-4x^2}+\dfrac{1}{2x^2+6x-ax-3a}\cdot\left(x+\dfrac{3x-6}{x-2}\right)$

11 $\dfrac{3ab}{a^2-ab}+\dfrac{5a}{a+b}-2\cdot\dfrac{b^2+2a^2}{a^2-b^2}$

12 $\left(\dfrac{1}{2x-y}+\dfrac{3y}{y^2-4x^2}-\dfrac{2}{2x+y}\right):\left(\dfrac{4x^2+y^2}{4x^2-y^2}+1\right)$

13 $\left(\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}-\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right):\left(\dfrac{m+n}{m-n}-\dfrac{m-n}{m+n}\right)$

14 $6a+\left(\dfrac{a}{a-2}-\dfrac{a}{a+2}\right):\dfrac{4a}{a^4-2a^3+8a-16}$

15 $\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}+y\right):\left[\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)\cdot\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right]$

16 $\left[\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)\cdot\dfrac{1}{a^2+2ab+b^2}+\dfrac{2}{(a+b)^3}\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right]:\dfrac{a-b}{a^3b^3}$

17 $\left[\dfrac{p^2-q^2}{pq}-\dfrac{1}{p+q}\cdot\left(\dfrac{p^2}{q}-\dfrac{q^2}{p}\right)\right]:\dfrac{p-q}{p}$

18 $\left[\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right):(x+y)+x\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)\right]:\dfrac{1+x}{y}$

19 $\dfrac{2b(a-1)}{(a-2)(b^2-1}-\dfrac{a+b}{ab+a-2b-2}-\dfrac{a-b}{ab-a-2b+2}$

20 $2n-\left(\dfrac{2n-3}{n+1}-\dfrac{n+1}{2-2n}-\dfrac{n^2+3}{2n^2-2}\right)\cdot\dfrac{n^3+1}{n^2-n}$

21 $\dfrac{a^4-b^4}{a^2b^2}:\left[\left(1+\dfrac{b^2}{a^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{2a}{b}+\dfrac{a^2}{b^2}\right)\right]$

22 $\left(\dfrac{1}{3a-b}+\dfrac{3ab-4}{27a^3-b^3}\right):\left(\dfrac{1}{9a^2+3ab+b^2}+\dfrac{2-2b}{b^3-27a^3}\right)$

23 $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}\cdot\dfrac{2-\dfrac{1+b^2}{b}}{\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{2}{b}+1}$

24 $\dfrac{\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-1\right)\cdot\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+1\right)\cdot(x^2-y^2)}{\dfrac{x^4}{y^2}-\dfrac{y^4}{x^2}}$

25 $\dfrac{\dfrac{a^2+1}{a-1}-a}{\dfrac{a^2-1}{a+1}+1}\cdot\left(1-\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{a}}\right)$

2.3 Výrazy s mocninami a odmocninami

Příklad 8

Zjednodušme (vyjádřeme výrazem s jedinou odmocninou):

a) $\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x^6\cdot\sqrt[4]{x^3}}}:\sqrt[5]{x^4\cdot\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[6]{x^7}}$

b) $\dfrac{\left(10^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(25^{\frac{1}{4}}\cdot 4^{\frac{1}{8}}\right)^{-2}}:\dfrac{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[4]{8}}}$

Řešení

a) Odmocniny převedeme na mocniny s racionálními mocniteli:

$$\left[x\cdot\left(x^6\cdot x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}:\left(x^4\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{7}{6}}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(x^{\frac{1}{2}}\cdot x\cdot x^{\frac{1}{8}}\right):\left(x^{\frac{48+3+14}{12}}\right)^{\frac{1}{5}}=$$

$$=x^{\frac{4+8+1}{8}}:\left(x^{\frac{65}{12}}\right)^{\frac{1}{5}}=x^{\frac{13}{8}}:x^{\frac{13}{12}}=x^{\frac{39-26}{24}}=x^{\frac{13}{24}}=\sqrt[24]{x^{13}},\ x>0\ ◀$$

b) Složená čísla rozložíme na prvočinitele:

$$\frac{\left[(2\cdot 5)^{\frac{1}{3}}\cdot(2^3)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-3}}{\left[(5^2)^{\frac{1}{4}}\cdot(2^2)^{\frac{1}{8}}\right]^{-2}}:\frac{\left(2\cdot 2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(2\cdot 2^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{2^{-1}\cdot 5^{-1}\cdot 2^{\frac{9}{2}}}{5^{-1}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}}:\frac{2^{\frac{5}{6}}}{2^{\frac{7}{12}}}=2^4:2^{\frac{10-7}{12}}=2^4:2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{15}{4}}=$$

$$=\sqrt[4]{2^{15}}=\sqrt[4]{2^{12}2^3}=8\cdot\sqrt[4]{8}\ ◀$$

Příklad 9

a) Vypočtěme: $\sqrt{15}(\sqrt{5}-2\sqrt{3})-(2\sqrt{3}-1)^2+(1+\sqrt{5})^2$

b) Upravme: $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4}$

Řešení

a) Provedeme roznásobení a částečné odmocnění:

$\sqrt{15}(\sqrt{5}-2\sqrt{3})-(2\sqrt{3}-1)^2+(1+\sqrt{5})^2=$

$=5\sqrt{3}-6\sqrt{5}-12+4\sqrt{3}-1+1+2\sqrt{5}+5=9\sqrt{3}-4\sqrt{5}-7\ ◀$

b) Zlomek rozšíříme výrazem $3\sqrt{2}+4$:

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4}=\frac{(3-2\sqrt{2})\cdot(3\sqrt{2}+4)}{(3\sqrt{2}-4)\cdot(3\sqrt{2}+4)}=\frac{9\sqrt{2}+12-12-8\sqrt{2}}{9\cdot 2-16}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ ◀

Příklad 10

Vypočtěme: $\dfrac{2}{1-\sqrt{3}}\cdot(3-2\sqrt{3})^{-1}$

Řešení

$$\frac{2}{1-\sqrt{3}}\cdot(3-2\sqrt{3})^{-1}=\frac{2}{1-\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{3-2\sqrt{3}}=\frac{2}{(1-\sqrt{3})(3-2\sqrt{3})}=\frac{2}{3-2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+6}=$$
$$=\frac{2}{9-5\sqrt{3}}=\frac{2(9+5\sqrt{3})}{(9-5\sqrt{3})(9+5\sqrt{3})}=\frac{18+10\sqrt{3}}{81-75}=\frac{18+10\sqrt{3}}{6}=3+\frac{5}{3}\sqrt{3}$$ ◀

Cvičení

26 Vypočtěte:

a) $[(-1)^{-4}+4\cdot 4^{-2}+2\cdot(-3)^{-3}]\cdot(2^3\cdot 2^{-3}-1)$

b) $2\sqrt{3}-5\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{75}$

c) $2\sqrt{27}:3^{1,5}-\left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{8}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$

d) $6^{\frac{2}{3}}\cdot 36^{\frac{2}{3}}\cdot(-6)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{16}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

e) $\left[\left(2-3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(2+3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$

f) $4^{-\frac{1}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{2}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+\sqrt{7})^0$

27 Upravte:

a) $\dfrac{\left(x^{\frac{9}{8}}\cdot y^{\frac{5}{4}}\right)\cdot z^{-\frac{3}{4}}}{x^{\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{3}{4}}\cdot z^{-\frac{5}{6}}}$

b) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{y^4}\cdot\sqrt[3]{y^{-2}}}{\sqrt[5]{y^3}}\right)^5$

c) $\left[\left(\dfrac{x\cdot x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^2$

d) $\sqrt[5]{\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-1}}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-3}}$

e) $\left(\sqrt[4]{\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

f) $\dfrac{\left(x^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{x^2}\right)^{-6}}{\sqrt[3]{x^2}\cdot x^{-\frac{5}{3}}}$

28 Odstraňte odmocninu ze jmenovatele zlomku:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{2}}$

e) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{2}}$

f) $\dfrac{30}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

V následujících příkladech dané výrazy zjednodušte a určete podmínky, za kterých mají provedené úpravy smysl.

29 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+4\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$

30 $\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)$

31 $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

32 $\left(\sqrt{2a}-\frac{2a}{a+\sqrt{2a}}\right):\left(\frac{\sqrt{2a}-2}{a-2}\right)$

33 $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\cdot\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$

34 $2x+\sqrt{x^2-1}\cdot\left(1+\frac{x^2}{x^2-1}\right)-\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

35 $\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{-2}-\left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^{-2}$

36 $\left(\sqrt{a}+\frac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}-\frac{b}{\sqrt{ab}}-\frac{a}{\sqrt{ab}+b}\right)$

37 $\dfrac{a\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\cdot\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}+\left(\frac{b+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}}$

38 $\left(\frac{2-a\sqrt{a}}{2a-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\cdot\left(\frac{2+a\sqrt{a}}{2a+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right):\frac{4+a^2}{4a-1}$

39 $\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a-b}-\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\left(\sqrt{ab}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^{-1}$

40 $\frac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}-\frac{2}{a^{\frac{3}{2}}}-\frac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}$

41 $\left(\frac{1}{a-\sqrt{2}}-\frac{a^2+4}{a^3-\sqrt{8}}\right):\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^{-1}$

42 $\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x^2}}+4\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt{x}}-2x\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{x}}}+3x\cdot\sqrt{x^{-\frac{1}{3}}}$

43 $\left[\dfrac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\right]^{-1}-\left(\dfrac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}$

44 $\left[(a+b)^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\left[(a+b)^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right]$

45 $\left(\dfrac{1}{b-\sqrt{a}}-\dfrac{1}{b+\sqrt{a}}\right):\dfrac{3a^{-2}\cdot b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}\cdot a^{-1}}$

46 $\sqrt{ab}\cdot\sqrt[3]{4a^2b^4}\cdot\sqrt[4]{8a^3b^5}\cdot\sqrt[6]{a^5b^7}\cdot\sqrt[12]{2a^3b^9}$

47 $\left[\dfrac{\left(a^{\frac{1}{4}}b^{-1}\right)^{-1}}{c^{-2}d^{\frac{1}{2}}}\right]^{-3}\cdot\left[\dfrac{a^{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt{d^5}}{\left(c^{\frac{3}{2}}\right)^4}\right]^{-1}$

48 $\left[(2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2}+\dfrac{1}{81^{-\frac{1}{4}}}\right]\cdot 16^{-0{,}75}$

49 $\dfrac{\left(15^{\frac{1}{3}}\cdot 27^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(25^{\frac{1}{4}}\cdot 9^{\frac{1}{8}}\right)^{-2}}:\dfrac{\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[4]{27}}}$

50 $\dfrac{5^{-5}\cdot(0{,}1)^{-4}+\left(\dfrac{1}{5}\right)^0-5^{-1}}{(-2)^{-2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-4}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}}$

2.4 Výrazy s absolutními hodnotami

Příklad 11 Vypočtěme:

$$\frac{2-|1-\sqrt{3}|}{|4-\sqrt{3}|-2|\sqrt{3}-2|}$$

Řešení

Nejprve odstraníme absolutní hodnoty na základě definice:

$$1-\sqrt{3}<0\Rightarrow|1-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-1$$
$$4-\sqrt{3}>0\Rightarrow|4-\sqrt{3}|=4-\sqrt{3}$$
$$\sqrt{3}-2<0\Rightarrow|\sqrt{3}-2|=2-\sqrt{3}$$

Můžeme tedy psát:

$$\frac{2-|1-\sqrt{3}|}{|4-\sqrt{3}|-2|\sqrt{3}-2|}=\frac{2-(\sqrt{3}-1)}{4-\sqrt{3}-2(2-\sqrt{3})}=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{(3-\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}-1$$ ◀

Příklad 12

Upravme výraz:
$$V(x) = \frac{6 + x - x^2}{(x+2) \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 9}}$$

Řešení

Nejprve upravíme výraz pod odmocninou a pak odmocníme:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$$

Výraz $V(x)$ lze tedy psát ve tvaru $V(x) = \dfrac{6 + x - x^2}{(x+2)|x-3|}$

Určíme podmínky pro proměnnou x, za nichž má výraz $V(x)$ smysl:

$$(x+2)|x-3| \neq 0 \Rightarrow x + 2 \neq 0 \vee |x-3| \neq 0 \Rightarrow x \neq -2,\ x \neq 3$$

Za těchto podmínek pak upravujeme:

$$V(x) = \frac{-(x^2 - x - 6)}{(x+2)|x-3|} = \frac{-(x-3)(x+2)}{(x+2)|x-3|} = -\frac{x-3}{|x-3|}$$

Nyní je nutné rozlišit, kdy je výraz uvnitř absolutní hodnoty záporný a kdy je kladný:

a) je-li $x - 3 > 0$, tzn. $x > 3$, je $|x-3| = x - 3$, tedy $V(x) = -1$

b) je-li $x - 3 < 0$, tzn. $x < 3$, je $|x-3| = -(x-3)$, tedy $V(x) = 1$

Závěr:

Je-li $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 3)$, potom $V(x) = 1$, je-li $x \in (3, \infty)$, potom $V(x) = -1$. ◄

Příklad 13

Zapišme danou množinu výčtem prvků nebo pomocí intervalů:

a) $\mathsf{A} = \{x \in \mathsf{R};\ |x-2| = 3\}$

b) $\mathsf{B} = \{x \in \mathsf{R};\ |x+4| \leq 5\}$

c) $\mathsf{C} = \{x \in \mathsf{R};\ |6-2x| > 10\}$

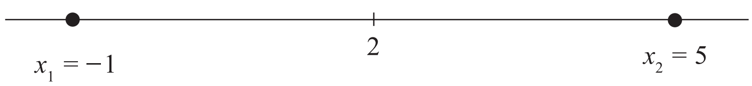
d) $\mathsf{D} = \{x \in \mathsf{R};\ |x+14| = -5\}$

e) $\mathsf{E} = \{x \in \mathsf{R};\ |3x-1| > -6\}$

f) $\mathsf{F} = \{x \in \mathsf{R};\ \left|-\frac{1}{2} - x\right| \leq -2\}$

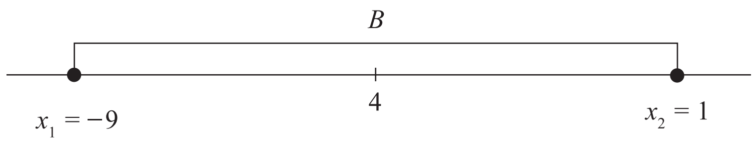
Řešení

a) Zápis $|x-2| = 3$ znamená, že vzdálenost obrazu čísla x na číselné ose od obrazu čísla 2 je rovna 3. Výsledkem jsou dvě čísla: $x_1 = -1$ a $x_2 = 5$.



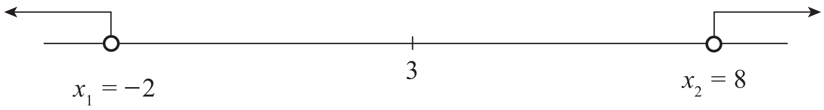
$\mathsf{A} = \{-1, 5\}$ ◄

b) Zápis $|x+4| \leq 5$ nejprve upravíme do tvaru $|x - (-4)| \leq 5$.
Toto pak znamená, že vzdálenost obrazu čísla x od obrazu čísla -4 na číselné ose je menší nebo rovna 5. Množina B pak obsahuje všechna reálná čísla náležící do intervalu $\langle -9, 1\rangle$.



$\mathsf{B} = \langle -9, 1\rangle$ ◄

c) Nerovnici $|6 - 2x| > 10$ upravíme do tvaru $|2x - 6| > 10 \Rightarrow |x - 3| > 5$.
Vzdálenost obrazu čísla x od obrazu čísla 3 na číselné ose je větší než 5.



$\mathsf{C} = (-\infty, -2) \cup (8, \infty)$ ◀

d) Absolutní hodnota jakéhokoliv čísla je vždy číslo nezáporné $\Rightarrow \mathsf{D} = \emptyset$ ◀

e) Absolutní hodnota jakéhokoliv čísla je vždy větší než číslo záporné $\Rightarrow \mathsf{E} = \mathsf{R}$ ◀

f) Absolutní hodnota, která je sama nezáporná, nemůže být menší než číslo záporné $\Rightarrow \mathsf{F} = \emptyset$ ◀

Cvičení

51 Vypočtěte:

a) $\dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 + |2 - \sqrt{3}| + 2|1 - \sqrt{3}|}$

b) $\big||2 - \sqrt{3}| + 2|1 - \sqrt{3}|\big|^2$

c) $\dfrac{|4 - \sqrt{10}| - |\sqrt{10} - 2|}{\sqrt{40} - |0{,}75 \cdot (-2^3)|}$

d) $\left(\dfrac{\sqrt{8} - |-2\sqrt{2}|}{|\sqrt{8} - 4| - \sqrt{2}}\right)^{-3}$

e) $\dfrac{|\sqrt{8} - \sqrt{2}| - |4 - \sqrt{18}|}{|\sqrt{50} - 3\sqrt{8}| + |3\sqrt{2} - \sqrt{32}|}$

f) $\left|\dfrac{-1}{|\sqrt{2} - 1|} - \dfrac{\sqrt{2}}{|1 - \sqrt{2}|}\right|$

52 Vyjádřete bez absolutních hodnot výrazy:

a) $|x + 1| + 2|x - 3| - 3|2x + 1|$, jestliže $x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 3\right)$

b) $\dfrac{|x + 1|}{x + 1} + \sqrt{x^2} - 2|3x - 2|$, jestliže $x \in \left(0, \dfrac{2}{3}\right)$

c) $\dfrac{2x}{|x - 3|} - |x + 2| + |x|$, jestliže $x \in (-2, 0)$

53 Upravte výraz:

a) $V(x) = \dfrac{x + |x| + 1}{x - |x| + 1}$

b) $V(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2} + 1}$

c) $V(x)\dfrac{x^2 - x - 12}{(x + 3)\sqrt{x^2 - 8x + 16}}$

54 Upravte:

a) $A = \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{(x^2 + 3x + 2) \cdot |x - 1|}$

b) $B = \dfrac{(x^2 - 3x + 2) \cdot |x + 2|}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$

55 Zapište danou množinu výčtem prvků nebo pomocí intervalů:

a) $\mathsf{A} = \left\{x \in \mathsf{R};\ \left|x + \dfrac{1}{2}\right| < 2{,}5\right\}$

b) $\mathsf{B} = \left\{x \in \mathsf{R};\ \left|1 - \dfrac{x}{2}\right| = 2\right\}$

c) $\mathsf{C} = \{x \in \mathsf{R};\ |-2x - 10| \geq 4\}$

d) $\mathsf{D} = \{x \in \mathsf{R};\ 1 \leq |x - 3| \leq 5\}$

e) $\mathsf{E} = \{x \in \mathsf{R};\ |x - 3{,}2| = -2\}$

f) $\mathsf{F} = \{x \in \mathsf{R};\ |3x + 4| > -2\}$

2.5 Výrazy s faktoriály a kombinačními čísly, binomická věta

Příklad 14

Zjistěme, které z čísel $A = 500! + 503!$ nebo $B = 501! + 502!$ je větší.

Řešení

Daná čísla upravíme:

$$A = 500! + 502! = 500!\,(1 + 501 \cdot 502 \cdot 503)$$

$$B = 501! + 502! = 500!\,(501 + 501 \cdot 502)$$

Označme:

$$x = 1 + 501 \cdot 502 \cdot 503$$

$$y = 501 + 501 \cdot 502 = 501(1 + 502) = 501 + 503$$

Závěr:

Platí $x > y$, proto $A > B$. ◀

Příklad 15

Zjednodušme výraz: $$V(n) = \frac{n!}{(n-3)!} + \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{(n+2)!}{(n-1)!} - (n^2 + 4)$$

Řešení

Daný výraz je definován pro všechna přirozená čísla, která splňují následující podmínky:

$$(n \geq 0 \wedge n+1 \geq 0 \wedge n+2 \geq 0 \wedge n-1 \geq 0 \wedge n-2 \geq 0 \wedge n-3 \geq 0) \Rightarrow n \geq 3$$

Výraz postupně upravujeme tak, abychom se zbavili faktoriálů zkrácením:

$$\frac{n!}{(n-3)!} + \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{(n+2)!}{(n-1)!} - (n^2 + 4) =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} - (n^2 + 4) =$$

$$= n(n-1)(n-2) + (n+1)n(n-1) + (n+2)(n+1)n - (n^2 + 4) =$$

$$= n^3 - 3n^2 + 2n + n^3 - n + n^3 + 3n^2 + 2n + n^2 - 4 = 3n^3 - n^2 + 3n - 4$$

Závěr:

$V(n) = 3n^3 - n^2 + 3n - 4$ pro přirozená čísla $n \geq 3$. ◀

Příklad 16

Rozhodněme, které z čísel $\binom{500}{490}$ nebo $\binom{499}{9}$ je větší.

Řešení

Použijeme vzorec $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\binom{500}{490} = \binom{500}{500-490} = \binom{500}{10} = \frac{500!}{(500-10)!\,10!} = \frac{500!}{490!\,10!} =$$

$$= \frac{500 \cdot 499 \cdot 498 \cdot \ldots \cdot 491 \cdot 490!}{490!\,10!} = \frac{500 \cdot 499 \cdot 498 \cdot \ldots \cdot 491}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 1}$$

$$\binom{499}{9} = \frac{499!}{(499-9)!\,9!} = \frac{499!}{490!\,9!} = \frac{499 \cdot 498 \cdot \ldots \cdot 491 \cdot 490!}{490!\,9!} =$$

$$= \frac{499 \cdot 498 \cdot \ldots \cdot 491}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1}$$

Porovnáním obou částečných výsledků dostaneme, že

$$\frac{500}{10}\cdot\binom{499}{9}=\binom{500}{490};\ \text{tedy}\ \binom{500}{490}\ \text{je 50krát větší než číslo}\ \binom{499}{9}.$$

Závěr:

$$\binom{500}{490}>\binom{499}{9}\ ◀$$

Příklad 17 V binomickém rozvoji $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x}\right)^{10}$ najděme člen obsahující x^2 a vypočtěme ho.

Řešení

Použijeme vzorec pro k-tý člen binomického rozvoje výrazu, dosadíme do něj a upravíme:

$$A_k=\binom{10}{k-1}\cdot(\sqrt[3]{x})^{10-k+1}\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)^{k-1}=\binom{10}{k-1}\cdot(-1)^{k-1}\cdot 2^{k-1}\cdot\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{10-k+1}\cdot(x^{-1})^k=$$

$$=\binom{10}{k-1}\cdot(-1)^{k-1}\cdot 2^{k-1}\cdot x^{\frac{14-4k}{3}}$$

Obsahuje-li některý člen v binomickém rozvoji výrazu x^2, předpokládejme, že je to člen A_k. Pak ovšem musí platit, že

$$x^{\frac{14-4k}{3}}=x^2\Rightarrow\frac{14-4k}{3}=2\Rightarrow k=2$$

$$A_2=\binom{10}{1}\cdot(\sqrt[3]{x})^9\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)^1=10x^3\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)=-20x^2$$

Závěr:

Hledaný člen je roven $-20x^2$. ◀

Cvičení

56 Zjednodušte:

a) $\dfrac{(n+1)!}{n!}-\dfrac{n!}{(n-1)!}$

b) $\dfrac{(n+2)!}{n!}-\dfrac{2(n+1)!}{(n-1)!}+\dfrac{n!}{(n-2)!}$

c) $\dfrac{1}{n!}-\dfrac{3}{(n+1)!}-\dfrac{n^2-4}{(n+2)!}$

d) $\dfrac{n^2-9}{(n+3)!}+\dfrac{6}{(n+2)!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$

57 Vyjádřete pomocí jednoho kombinačního čísla a pak vypočtěte:

a) $\binom{10}{4}+\binom{10}{5}$

b) $\binom{18}{2}+\binom{18}{16}$

c) $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{2}$

d) $\binom{5}{5}+\binom{6}{5}+\binom{7}{5}+\binom{8}{5}$

e) $\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}$

58 Pomocí binomické věty určete:

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{5})^4$

b) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^5$

c) $(2+\sqrt[3]{4})^5$

d) $(\sqrt{2}-2\sqrt{5})^5$

e) $(2-3x)^5$

f) $(x^2+1)^6$

g) $\left(3x^2-\dfrac{2}{x}\right)^5$

59 Vypočtěte určený člen binomického rozvoje výrazu:

a) $\left(\frac{2}{x} - 3x^4\right)^8$, $A_5 = ?$ b) $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^3}\right)^{10}$, $A_7 = ?$

c) $(\sqrt[3]{x} - 2x\sqrt{x})^{19}$, $A_{11} = ?$

60 Ve výrazu $\left(5x^2 - \frac{4}{x}\right)^6$ určete:

a) kolikátý člen obsahuje x^3,
b) kolikátý člen je absolutní,
c) pro které reálné číslo x je jeho čtvrtý člen roven 160.

Souhrnné úlohy s volbou výsledku

1 Výraz $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2$ je pro všechna $x, y \in \mathrm{R}$ roven

A $2y^4$ B $2xy$ C $4x^4y^4$ D $4x^2y^2$ E žádná z uvedených odpovědí není správná

2 Nejmenší společný násobek výrazů $x^3 + x^2 + x + 1$, $x^2 - 1$ je roven

A $x(x^2 - 1)$ B $(x + 1)^2(x - 1)$ C $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$ D $x(x - 1)^2$
E žádná z uvedených odpovědí není správná

3 Největší společný dělitel výrazů $a^2 + 3a$, $a^2 + 6a + 9$ je roven

A $a - 3$ B $3(a + 3)$ C $a + 3$ D $(a - 3)(a + 3)$
E žádná z uvedených odpovědí není správná

4 Dvojčlen $x^2 - 7x$ doplníme na druhou mocninu lineárního dvojčlenu, jestliže k němu připočteme člen

A $\frac{7}{2}x$ B $\frac{49}{4}$ C $\frac{7}{2}$ D $\frac{49}{4}x^2$ E žádná z uvedených odpovědí není správná

5 Pro přípustné hodnoty x, y je možno výraz $V(x, y) = \frac{x^2 - xy - 2x + 2y}{x^3 - x^2y - 4x + 4y}$ upravit na tvar

A $\frac{x-2}{x+2}$ B $\frac{x-y}{x-2}$ C $\frac{1}{x+2}$ D $\frac{x-y}{x+y}$ E žádná z uvedených odpovědí není správná

6 Hodnota výrazu $\left(a + b - \frac{4ab}{a+b}\right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2 - b^2}\right)$ je pro $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{2}{3}$ rovna

A $\frac{1}{6}$ B 6 C 1 D $-\frac{1}{6}$ E žádná z uvedených odpovědí není správná

7 Pro $a \in \mathrm{R} - \{0, 1\}$ je výraz $V(a) = \left(\frac{1}{1-a} - 1\right) : \left(a - \frac{1 - 2a^2}{1-a} + 1\right)$ roven výrazu

A 1 B $\frac{1}{a}$ C $\frac{1}{a^2}$ D $\frac{(1-a)^2}{a^3}$ E žádná z uvedených odpovědí není správná

8 Výraz $V(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right) : \left[\frac{x^2 - 4}{2x} - \frac{1}{x+2} \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)\right]$ je roven výrazu

A $\frac{2}{x+1}$ pro $x \in \mathrm{R} - \{2, 0, -1\}$ B $\frac{2}{x+1}$ pro $x \in \mathrm{R} - \{-2, -1, 0, 2\}$

C $\dfrac{2x}{x+1}$ pro $x \in \mathsf{R} - \{-2,\ 0,\ -1\}$ D $\dfrac{2(x-2)}{x+1}$ pro $x \in \mathsf{R} - \{-2,\ 0,\ -1\}$

E žádná z uvedených odpovědí není správná

9 Výraz $V(x,\ y) = \left(\dfrac{x^2+y^2}{x} + y\right) : \left[\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right) \cdot \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right]$ je za podmínek $x \neq 0,\ y \neq 0,\ y \neq x$ roven výrazu

A $\dfrac{xy}{x-y}$ B $\dfrac{xy^2}{x-y}$ C $\dfrac{x^2y^2}{x-y}$ D $\dfrac{xy^2}{x^3-y^3}$ E žádná z uvedených odpovědí není správná

10 Pro $x \in \mathsf{R} - \{0\}$ a $y \in \mathsf{R} - \{0\}$ je výraz $V(x,\ y) = \left[\left(xy + \dfrac{1}{xy}\right)x - \dfrac{1}{y}\right] \cdot \left[(y-2) \cdot \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{xy}\right]$ roven výrazu

A $x(y+1)^2$ B $x^2(y-1)^2$ C $x(y-1)^2$ D $x^2y(y-1)^2$

E žádná z uvedených odpovědí není správná

11 Úpravou výrazu $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b} + 1}{\dfrac{a+b}{a-b} - 1}$ dostaneme

A $\dfrac{a}{b},\ a \neq b,\ b \neq 0$ B $a+b,\ a \neq \pm b$ C $a \cdot b,\ a \neq \pm b$ D $a-b,\ a \neq \pm b,\ b \neq 0$

E žádná z uvedených odpovědí není správná

12 Výraz $\dfrac{\dfrac{a}{b^2+ab} - \dfrac{2}{a+b} + \dfrac{b}{a^2+ab}}{\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} - 2}$ je pro $ab \neq 0,\ a^2 \neq b^2$ možno upravit na tvar

A $\dfrac{ab}{a+b}$ B $a+b$ C $\dfrac{1}{a+b}$ D $\dfrac{a-b}{a+b}$ E žádná z uvedených odpovědí není správná

13 Výraz $\dfrac{\dfrac{a^2+b^2}{b} + 2a}{\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a}} + \dfrac{2b - \dfrac{a^2+b^2}{a}}{\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}}$ je za podmínek $a \neq 0,\ b \neq 0,\ a \neq b,\ a \neq -b$ roven

A a^2+b^2 B a^2-b^2 C $(a+b)^2$ D $(a-b)^2$ E žádná z uvedených odpovědí není správná

14 Hodnota výrazu $V = \dfrac{2^3 \cdot 5^{-2}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^7 \cdot 25^{-1}} : \dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} \cdot 5^{-3}}{2^{-2} \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^0}$ je rovna

A 10 B 100 C 500 D 1 000 E žádná z uvedených odpovědí není správná

15 Výraz $V(x,\ y) = \dfrac{[(x+y)^2 \cdot (x^2-y^2)]^{-1}}{(x^2-y^2)^{-3}}$ je možno pro přípustné hodnoty x, y upravit na tvar

A $(x-y)^2$ B $x+y$ C $\dfrac{x+y}{x-y}$ D x^2-y^2 E žádná z uvedených odpovědí není správná

16 Výraz $\left(\dfrac{x^{-2}y^2z^{-2}}{x^0y^{-8}}\right)^{-2} : \dfrac{x^2z^3}{x^{-4}y^7}$ je za podmínek $x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$ roven

$\boxed{A}$ $\dfrac{x^2z}{y^{11}}$ $\boxed{B}$ $x^2y^{11}z$ $\boxed{C}$ $\dfrac{x^8z}{y^4}$ $\boxed{D}$ $\dfrac{z}{x^2y^{13}}$ $\boxed{E}$ žádná z uvedených odpovědí není správná

17 Jestliže $a \neq b,\ a \neq -b,\ a \neq 0,\ b \neq 0,$ potom je výraz $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}} - \dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}$ roven

$\boxed{A}$ $\dfrac{4ab}{b^2-a^2}$ $\boxed{B}$ $\dfrac{2a^2}{b^2-a^2}$ $\boxed{C}$ $\dfrac{2a}{b^2-a^2}$ $\boxed{D}$ 0 $\boxed{E}$ žádná z uvedených odpovědí není správná

18 Hodnota výrazu $\dfrac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} : \left(1+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)$ je pro $a = 6,\ b = 2$ rovna

$\boxed{A}$ $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\boxed{B}$ $\dfrac{1}{4}$ $\boxed{C}$ $\dfrac{1}{2}$ $\boxed{D}$ $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ $\boxed{E}$ žádná z uvedených odpovědí není správná

19 Hodnota výrazu $V = 5\sqrt{18} - \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - 2\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ je rovna

$\boxed{A}$ $27\sqrt{2}-8\sqrt{3}-6$ $\boxed{B}$ $27\sqrt{2}-8\sqrt{3}+6$ $\boxed{C}$ $27\sqrt{2}-12\sqrt{3}-6$ $\boxed{D}$ $3\sqrt{2}-12\sqrt{3}+6$

$\boxed{E}$ žádná z uvedených odpovědí není správná

20 Hodnota výrazu $\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2} - \dfrac{2}{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}-1+\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}}$ je rovna

$\boxed{A}$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\boxed{B}$ $\dfrac{1}{2}$ $\boxed{C}$ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\boxed{D}$ $-\dfrac{1}{2}$ $\boxed{E}$ žádná z uvedených odpovědí není správná

21 Jestliže pro kladné číslo x platí $\sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}} = x^k$, pak číslo k je rovno

$\boxed{A}$ $\dfrac{3}{8}$ $\boxed{B}$ $\dfrac{7}{24}$ $\boxed{C}$ $\dfrac{5}{12}$ $\boxed{D}$ $\dfrac{1}{24}$ $\boxed{E}$ žádná z uvedených odpovědí není správná

22 Pro $a \in \mathsf{R}^+$ je výraz $V(a) = \left(\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^4}) : (\sqrt[4]{a^5} \cdot \sqrt[6]{a^7}\right)$ roven výrazu

$\boxed{A}$ $\dfrac{\sqrt[5]{a^4}}{a}$ $\boxed{B}$ $\sqrt[5]{a}$ $\boxed{C}$ $\dfrac{\sqrt[5]{a}}{a}$ $\boxed{D}$ $\dfrac{\sqrt[5]{a^2}}{a}$ $\boxed{E}$ žádná z uvedených odpovědí není správná

23 Množina všech reálných čísel a, pro která je výraz $(a^{-1}+\sqrt{3^{-1}}) : \left[(a+\sqrt{3})(a\sqrt{3})^{-1}\right]$ roven 1, je

$\boxed{A}$ $(-\infty, 0)$ $\boxed{B}$ $\varnothing$ $\boxed{C}$ $(0, \infty)$ $\boxed{D}$ $\mathsf{R} - \{0\}$

$\boxed{E}$ žádná z uvedených odpovědí není správná

24 Množina všech reálných čísel x, pro která je výraz $\dfrac{4x^{-\frac{1}{2}}}{1-(1+\sqrt{x})^2(1-\sqrt{x})^{-2}} \cdot \dfrac{x}{(1-\sqrt{x})^2}$ roven -1, je

$\boxed{A}$ $(0, \infty)$ $\boxed{B}$ $(0, 1)$ $\boxed{C}$ $(0, 1) \cup (1, \infty)$ $\boxed{D}$ $(1, \infty)$

$\boxed{E}$ žádná z uvedených odpovědí není správná

25 Výraz $\big|-2+|x+1|\big|$ je pro každé $x < -1$ roven

$\boxed{A}$ $-x+1$ $\boxed{B}$ $x-3$ $\boxed{C}$ $x+1$ $\boxed{D}$ $-x-3$

$\boxed{E}$ žádná z uvedených odpovědí není správná

26 Množinou všech řešení nerovnice $\dfrac{2}{|x-3|} > 1$ s neznámou $x \in \mathsf{R}$ je

A $(5, \infty)$ B $(1, \infty)$ C $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$ D $(1, 3) \cup (3, 5)$

E žádná z uvedených odpovědí není správná

27 Pro každé $n \in \mathsf{N}$ je výraz $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{3}{(n+1)!} - \dfrac{n^2-4}{(n+2)!}$ roven

A 1 B $\dfrac{1}{(n+2)!}$ C $\dfrac{n+2}{(n+1)!}$ D 0 E žádná z uvedených odpovědí není správná

28 Pro přípustné hodnoty n je výraz $V(n) = \dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} - 2\dbinom{n}{n-2}$ roven

A 0 B $2n$ C $2n^2$ D $\dfrac{n^2+3n}{2}$ E žádná z uvedených odpovědí není správná

29 Výraz $V(n) = \dfrac{(n-1)!}{(n-3)!} - 2\dbinom{n}{1} - 4\dbinom{n-5}{n-7}$ je roven výrazu

A $-n^2 + 31n - 78$ pro $n \in \mathsf{N}$, $n \geq 7$ B $-n^2 + 17n - 58$ pro $n \in \mathsf{N}$, $n \geq 7$

C $-n^2 + 17n - 58$ pro $n \in \mathsf{N} - \{3, 7\}$ D $-n^2 + 19n - 58$ pro $n \in \mathsf{N} - \{3, 7\}$

E žádná z uvedených odpovědí není správná

30 V binomickém rozvoji výrazu $\left(\dfrac{1}{x} + 2x^2\right)^9$ je absolutní člen roven

A 672 B 252 C 120 D 242 E žádná z uvedených odpovědí není správná

Výsledky

Cvičení

1 a) $4a^3 + 2a^2b - 4ab^2 + 3b^3$ • b) $-16x^6y + 20x^5y^2 + 16x^4y^3 - 15x^3y^4$ • c) $9a^4 - 6a^3 + a^2$ • d) $\frac{4}{9}a^2 - b^2$ • e) $4a^2 + b^2 + c^2 + 4ab + 4ac + 2bc$ • f) $a^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1$ • g) $8x^6y^3 - 13x^4y^2 + 5x^2y - \frac{5}{4}$

2 a) $3x^2 - x + 1,\ x \neq 2$ • b) $x + y,\ x \neq 0 \wedge y \neq 0$ • c) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1,\ x \neq 1$ • d) $x^2 - x + 1 + \frac{2}{x-4},\ x \neq 4$ • e) $a^3 + 2a - 3 + \frac{1}{2a-1},\ a \neq \frac{1}{2}$ • f) $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2-1},\ x \neq \pm 1$

3 a) $(x+y)(x-5)$ • b) $(2x-1)(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$ • c) $(a-2)(a^3+8)$ • d) $(x+1)^2(x-1)^2$ • e) $(2a-3b)^2(1+2a-3b)$ • f) $(z^2+5)(z+\sqrt{5})(z-\sqrt{5})$ • g) $(x+9)(5x-3)$ • h) $4(5x^2-4y)(5x^2+4y)$

4 a) $(x+3)(x+4)$ • b) $(x-3)(x-2)$ • c) $(2x-1)(3x+1)$ • d) $-(a+4)(a-1)$ • e) $(2y-1)(3y+8)$ • f) $(2k-5)^2$

5 a) $x(x-7)(x+6)$ • b) $x^3(x-8)(x+7)$ • c) $(x-1)(x+1)(x^2+3)$ • d) $(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})$

6 a) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ • b) $2(x-1)^2 + 1$ • c) $-(x-1)^2 + 4$ • d) $-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}$

7 a) $(x+28)(x-12)$ • b) $(2x+1)(4x-3)$ • c) rozklad na součin v R neexistuje

8 $a - b,\ a \neq \pm b$

9 $\frac{1}{a},\ a \neq 0 \wedge x \neq 2a$

10 $\frac{1}{a+2x},\ x \neq 2 \wedge x \neq \pm\frac{a}{2} \wedge x \neq -3$

11 $\frac{a-b}{a+b},\ a \neq b \wedge a \neq -b \wedge a \neq 0$

12 $-\frac{1}{4x},\ x \neq \frac{y}{2} \wedge x \neq -\frac{y}{2} \wedge x \neq 0$

13 $\frac{mn}{m^2+n^2},\ m \neq \pm n \wedge m \neq 0 \wedge n \neq 0$

14 $(a+2)^2,\ a \neq \pm 2 \wedge a \neq 0$

15 $\frac{xy^2}{x-y},\ x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x \neq y$

16 $\dfrac{ab}{a-b},\ a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq \pm b$

17 $\dfrac{p}{p+q},\ p \neq 0 \wedge q \neq 0 \wedge p \neq \pm q$

18 $\dfrac{x-y}{x},\ x \neq 0 \wedge x \neq -1 \wedge y \neq 0 \wedge x \neq -y$

19 $0,\ a \neq 2 \wedge b \neq \pm 1$

20 $\dfrac{2(n-1)}{n},\ n \neq 0 \wedge n \neq \pm 1$

21 $\dfrac{a+b}{a-b},\ a \neq b \wedge a \neq 0 \wedge b \neq 0$

22 $3a+b+2,\ a \neq \dfrac{b}{3} \wedge a \neq \dfrac{2-b}{3}$

23 $2a,\ a \neq b \wedge a \neq -b \wedge b \neq 0 \wedge b \neq 1$

24 $1,\ x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x \neq \pm y$

25 $-\dfrac{1}{a},\ a \neq 0 \wedge a \neq \pm 1$

26 a) 0 • b) $-10\sqrt{3}$ • c) $\dfrac{3}{4}$ • d) -162 • e) 2 • f) 1

27 a) $\sqrt[12]{xyz},\ x, y, z > 0$ • b) $y^{-3},\ y \neq 0$ • c) $\sqrt[3]{x},\ x > 0$ • d) $\sqrt{a},\ a > 0$ • e) $x^{-\frac{1}{16}},\ x > 0$ • f) $x^{-5},\ x \neq 0$

28 a) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ • b) $\sqrt{2}-1$ • c) $3(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ • d) $3 \cdot \sqrt[3]{4}$ • e) $2 \cdot \sqrt[4]{8}$ • f) $\dfrac{5(3\sqrt{2}+\sqrt{30}-2\sqrt{3})}{2}$

29 $4x,\ x > 0 \wedge x \neq 1$

30 $\dfrac{\sqrt{a-b}}{b},\ a \geq 0 \wedge a > b \wedge a \geq -b \wedge b \neq 0$

31 $1,\ a \geq 0 \wedge b \geq 0 \wedge a \neq b$

32 $a,\ a \neq 2 \wedge a > 0$

33 $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1},\ x \neq 1 \wedge x > 0$

34 $2(x+\sqrt{x^2-1}),\ |x| > 1$

35 $\dfrac{(1+x)\sqrt{x}}{x},\ x > 0 \wedge x \neq 1$

36 $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}},\ a > 0 \wedge b > 0$

37 $\sqrt{ab},\ a > 0 \wedge b > 0$

38 $\dfrac{1-a}{a},\ a \neq \dfrac{1}{4} \wedge a > 0$

39 $1,\ a \neq b \wedge a > 0 \wedge b > 0$

40 $\sqrt{a},\ a \neq 1 \wedge a > 0$

41 $\dfrac{1}{a},\ a \neq \sqrt{2} \wedge a \neq 0$

42 $2\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+2),\ x > 0$

43 $\dfrac{x^2}{2x-1},\ x \notin \left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, 1, 2\right\}$

44 $2\sqrt{ab},\ a \geq 0 \wedge b \geq 0$

45 $\dfrac{2\sqrt{a}}{3b},\ a > 0 \wedge b \neq 0 \wedge \sqrt{a} \neq \pm b$

46 $2\sqrt{2}a^3b^5,\ ab \geq 0$

47 $b^{-\frac{11}{3}} \cdot d^{-1},\ a > 0 \wedge c > 0 \wedge d > 0 \wedge b \neq 0$

48 $\dfrac{9}{8}$

49 $27 \cdot \sqrt[4]{3^3}$

50 2

51 a) $-2+\sqrt{3}$ • b) 3 • c) -1 • d) nemá smysl • e) $\sqrt{2}-1$ • f) $3+2\sqrt{2}$

52 a) $-7x+4$ • b) $7x-3$ • c) $\dfrac{2x^2-2x-6}{-x+3}$

53 a) pro $x \geq 0$ je $V(x) = 2x+1$, pro $x < 0$ je $V(x) = \dfrac{1}{2x+1},\ x \neq -\dfrac{1}{2}$ • b) pro $x \in \langle 0, \infty)$ je $V(x) = x^2-1$, pro $x \in (-\infty, 0)$ je $V(x) = -(x+1)^2$ • c) pro $x \in (-\infty, 3) \cup (-3, 4)$ je $V(x) = -1$, pro $x \in (4, \infty)$ je $V(x) = 1$

54 a) pro $x \in (-\infty, 1) - \{-2, -1\}$ je $A = -1$, pro $x \in (1, \infty)$ je $A = 1$ • b) pro $x \in (-\infty, -2)$ je $B = -1$, pro $x \in (-2, \infty) - \{1, 2\}$ je $B = 1$

55 a) $\mathsf{A} = (-3, 2)$ • b) $\mathsf{B} = \{-2, 6\}$ • c) $\mathsf{C} = (-\infty, -7\rangle \cup \langle -3, \infty)$ • d) $\mathsf{D} = \langle -2, 2\rangle \cup \langle 4, 8\rangle$ • e) $\mathsf{E} = \varnothing$ • f) $\mathsf{F} = \mathsf{R}$

56 a) 1 • b) 2 • c) 0 • d) $\dfrac{1}{(n+2)!}$

57 a) $\dbinom{11}{5} = 462$ • b) $2\dbinom{18}{2} = 306$ • c) $\dbinom{7}{3} = 35$ • d) $\dbinom{9}{6} = \dbinom{9}{3} = 84$ • e) $\dbinom{8}{4} = 70$

58 a) $89+28\sqrt{10}$ • b) $109\sqrt{2}+89\sqrt{3}$ • c) $192+120 \cdot \sqrt[3]{4}+84 \cdot \sqrt[3]{16}$ • d) $2\,404\sqrt{2}-1\,640\sqrt{5}$ •
e) $32-240x+720x^2-1\,080x^3+810x^4-243x^5$ • f) $x^{12}+6x^{10}+15x^8+20x^6+15x^4+6x^2+1$ •
g) $243x^{10}-810x^7+1\,080x^4-720x+\dfrac{240}{x^2}-\dfrac{32}{x^5}$

59 a) $90\,720x^{12}$ • b) $\dfrac{210}{x^{16}}$ • c) $\dbinom{19}{10} \cdot 2^{10}x^{18}$

60 a) A_4 • b) A_5 • c) $A_4 = 160 \Rightarrow x = -\frac{1}{10}$

Úlohy s volbou výsledku

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	C	C	B	C	A	B	B	B	C	A	C	A	D	A

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D	A	B	C	D	A	A	E	C	D	D	D	B	B	A